目 录

第二篇 群 论

第三篇 拓扑学

第四篇 几何学与数论

引　言

从本书的书名《20世纪数学思想》来看，同M·克莱因（Kline, Morris, 1908—1992）的名著《古今数学思想》（1972）有某种亲缘的关系。可是，比起《古今数学思想》这样的历史论述和分析，20世纪的数学史还根本无法做到。从数学内容的艰深和数学领域的广阔来看，我们几乎无法全面而深入地掌握20世纪的数学素材，就像19世纪末和20世纪初，许多数学家及数学史家所做的评述那样。在这方面，我们也无法同兄弟学科和亲缘的学科相比。对于20世纪物理学史和生物学史，不仅有较多的专著问世，例如1995年出版的三大卷《20世纪物理学》，而且在资料积累及研究方面已有相当的基础。物理学史有相当丰富的口头史资料供人使用。与数学同宗的计算史，甚至早在70年代后期就有专门的期刊，还有多次的学术会议。可以说，当代的科学技术史研究热火朝天。

反观数学史，20世纪数学史的研究可以说几乎是空白。郑重的数学史研究大致到达19世纪末，而20世纪数学史直到最近才刚刚开始，研究的范围还局限在1900年到1950年。在这方面，一些大数学家的论述的确为我们的认识提供了线索。诚然，许多数学史家的确不喜欢数学家多少带有主观偏见的论述，但是，对于研究19世纪特别是20世纪的数学史家来说，

他们的困难也在于如何正确地理解和把握数学内容和数学思想，而这正是专业数学家之所长。虽然专业数学家在掌握专业和技术内容方面可能是深入的，但是，他们在由此掌握数学全局以及从历史、从发展看问题未免又有所短。数学家最难把握的往往是他所研究的狭窄课题在整个数学甚至在某一分支中的地位以及它的作用。幸好，我们还有一些有文化、历史、哲学素养的大数学家，他们的确能在千头万绪、杂乱无章的数学论文的海洋中，给我们指出数学的主流和发展方向。

因此，对于试图研究 20 世纪数学史的学者来说，与其在数学的汪洋大海中盲目挣扎，还不如暂时接受一些大数学家的方向引导，找出 20 世纪数学发展的主线，对数学有一个整体的认识，然后旁及其它，逐步深入。我们看，这可能是一个比较妥当的办法。没有一个适当的研究框架，我们很难找到自己的位置。只有在我们能够驾驭整个局势时，我们再对他们进行批判也不为晚。

在庞加莱（Poincaré，Henri，1854—1912）、希尔伯特（Hilbert，David，1862—1943）之后，20 世纪最伟大的数学家非外尔（Weyl，Hermann，1885—1955）莫属。他不仅为我们留下许多数学成果和数学方法，而且对于他亲历的整个 20 世纪前半期的数学，进行了客观而中肯的评述。让我们把它们作为本书的引导。不妨我们引用他的语录来显示他的思想，这更能凸显他本人的观点。

外尔的 4 大卷论文都值得好好一读。这里我们引用的主要取自他的“半个世纪的数学”（1951）以及他对影响本世纪数学最大的数学家希尔伯特和爱米·诺特（Noether，Emmy，1882—1935）工作的评述：“大卫·希尔伯特及其数学工作”

(1944),“爱米·诺特”(1935),这三篇论文均有汉译本。遗憾的是,他还有许多重要著作没有汉译本。不过,我们也选一些,供参考。

在引用他的语录之前,我们先把他对上半世纪数学的主题开列如下:

半个世纪的数学

1. 导论、公理论

第一部分 代数学、数论、群

2. 环、域、理想
3. 代数学和数论的一些成就
   (*p* 进数域、类域论、素数分布和 ζ 函数、堆叠理论、超越数论)
4. 群、向量空间和代数
5. 结束语
   (群在数学中的核心作用,若尔当(Jordan, Camille, 1838—1922)—荷尔德(Hölder, Otto, 1859—1937)定理,群表示论、线性群、群与几何学、连续群、李(Lie, Sophus, 1842—1899)代数)

第二部分 分析、拓扑学、几何学、基础论

6. 线性算子及其谱分解,希尔伯特空间
7. 勒贝格(Lebesgue, Henri, 1875—1941)积分、测度论、遍历假设
8. 拓扑学和调和积分
9. 共形映射、亚纯函数、大范围变分法(特别强调拓扑观点)
10. 几何学(微分几何学、黎曼(Riemann, Bernhard,

1826—1866）度量、联络、曲率、大范围微分几何学、纤维空间）

11．基础论

这个提纲正好印证他对20世纪（至少是上半世纪）数学主流的看法，“当前拓扑学的天使和代数学的魔鬼在争夺数学的灵魂”。

影响20世纪的伟大数学家还应该举出冯·诺伊曼（Von Neumann，John，1903—1957），当然他更以计算机的开创者、计算数学家、应用数学家而知名。但是，这位全才的数学家对于结构数学依然有重大贡献，他的思想仍然领先于他的时代。例如他在数理逻辑，希尔伯特空间的算子理论、算子代数、群上测度以及遍历理论方面的工作都是开创性的。

正是上面4位数学巨人，再加上嘉当（Cartan，Elie，1869—1951）、爱米·诺特、哥德尔（Gödel，Kurt，1906—1978）、维纳（Wiener，Norbert，1894—1964）等大数学家，以及法国的函数论学派，俄国—苏联学派（特别是鲁金（Luzin，Nikolai Nikolaievich，1883—1950）为首的莫斯科学派），波兰学派（特别是以巴拿赫（Banach，Stefan，1892—1945）为代表的里沃夫学派），最后由布尔巴基学派集其大成，20世纪的数学最终走上自己的光辉历程。

第一篇　结构数学基础

比起 19 世纪来，20 世纪的数学更趋于统一，但这并不意味着 20 世纪缺少新学科。实际上，现在数学的课题中有 80% 以上是 20 世纪创造的，但也有 20%左右的课题是 19 世纪遗留下来的。我们不妨称它们为经典数学或古典数学。经典数学中，除了极少数的问题是 18 世纪末以前提出来的之外（这些问题我们将在 1.1.3 节列举其中主要的），大部分来自 19 世纪。19 世纪除了传统的数论、代数、分析以及几何四大领域之外，还开创了四个重要领域，它们是代数数论、代数几何学、微分几何学（特别是高维微分流形的几何）和李群理论，它们在结构数学的冲击下，在 20 世纪中有了显著的进展。

在 19 世纪具体数学背景下，20 世纪开创了结构数学及元数学两大范畴的一系列新学科，它们完全是从自然的对象经历多次的推广和抽象得来，然后再通过各种途径衍生出来的，典型的有：群、环、域、格、线性空间（向量空间）、度量空间、拓扑空间、测度空间、希尔伯特空间、巴拿赫空间、拓扑向量空间、微分流形、代数簇等，乃至各种衍生的对象如半群、群环、除环、拓扑群、代数群、算术群、巴拿赫代数、C^*代数、冯·诺伊曼代数，以及更为复杂的对象如伊德尔（*Idèle*）、阿德尔（*adèle*）、纤维空间、绯索（*faiseaux*，*sheaf*，通常译为

层，不妥，因 *strata*，*laminations* 等更应译为层）、范畴、函子、复空间、拓扑斯（*topos*）、量子群、概形（*scheme*）、动形（*motive*）等等，实际上每一个这类对象都对应一套理论，形成独立的学科，成为专门研究的领域。其中比较成熟的，属于结构数学的有：群论、环论、域论、格论、一般拓扑学、点集拓扑学、组合拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学、几何拓扑学、同调代数学、K 理论、测度与积分理论、泛函分析、算子代数理论等，以及由它们衍生出来的子学科。

元数学几乎完全是 20 世纪的产物，特别是 20 世纪 30 年代以后形成的公理集合论、递归论、证明论及模型论。这个领域现在大都已独立发展，不过在其深处仍同结构数学有着千丝万缕的联系。另一方面，伴随计算机科学的兴起，作为基础的元数学又产生许多边缘学科。

结构数学不是无源之水，无本之木，因此，它的产生不但大大扩大了数学对象的领域，而且与经典数学结合在一起，对经典问题的解决有着极大的促进。数学结构的观点把建立在实数域及复数域上的代数、数论、分析及几何推广到一般域上，特别是代数数论一方面推广到局部域上，另一方面推广到函数域上。代数几何学从复数域推广到一般域上，而且有了内蕴的定义。现代的代数几何学几乎是交换代数学的同义语。实数空间上的分析也推广到一般流形上，构成大范围分析。实数域上的付立叶级数理论推广到李群之上形成抽象调和分析，而泛函分析则完全改变偏微分方程的研究路线。

因此，不了解结构数学基本概念的来龙去脉、不了解这一套新学科如何由传统数学演化而来，就很难理解 20 世纪数学，而这正是我们下面要详细论述的。

1　19世纪数学的遗产

每个时期的数学都不是凭空产生的，20世纪的数学也是植根于过去数学的土壤之中。特别是结构数学，大都在19世纪的数学当中已有萌芽。

19世纪的数学与前后两个世纪的数学有很大的不同，它真正成为一门独立存在的自在的科学，有自己的对象及理论体系，而不像过去那样只是依附于自然科学的工具和技术总汇。正因为如此，19世纪的数学打破过去对它的对象及方法所造成的种种限制，呈现出千姿百态的多样性，同时也因此在保守与革新和解放之间引起数学家的争论，最终涉及到基础问题的大讨论。

19世纪数学与18世纪末以前的全部数学相比，数量和质量都不可同日而语。如果说M·康托尔（Cantor, Moritz, 1829—1920）用4大卷写18世纪末以前的全部数学史，19世纪应该用20大卷，因这只不过是刚刚涉及皮毛而已，真正的文献数量则是以前的10倍有余。从内容上讲，在狄奥东涅（Dieudonné, Jean, 1906—1992）的《数学简史》中，18世纪的内容不到19世纪的5%，看来从实际成就来衡量，1:20的比例大体上差不多。

尽管数学的对象不断地扩张，但是其中一些核心的对象，

如数与形则很早就有，尤其几千年几百年的数论问题、几何问题，不少在19世纪、20世纪获得解决。然而也有相当数量的有千百年历史的难题，至今离完全解决尚远，例如完全数问题、莫德尔（Mordell, Joel, 1888—1972）方程

$$y^2 = x^3 + k \quad (k \text{ 为正负整数})$$

求解问题（它虽然被称为莫德尔方程，但至少应追溯到丢番图时期）、同余数问题（哪些正整数是边长为有理数的三角形的面积）、等半径球的最密堆积问题等等。因此，数学比任何其它学科都更有继承性。正如法国大数学家庞加莱所言，你要了解数学的未来吗？最好的办法就是了解数学的过去和现在。因此在进入20世纪数学之前，不能不对过去的数学做一个简短的回顾。

1.1 18世纪末之前的数学

1. 数学对象的产生与演化

从古到今数学都是有着多种对象的学科，这些对象有着不同的来源。麦克莱恩（Maclane, Saunders, 1909—）曾列举人类15种活动及其所产生的数学观念，虽然不一定准确而全面，却可反映出众多对象的不同来源：

活动	观念	概念表述
收集	集体	（元素的）集合
数数	下一个	后继、次序、序数
比较	计数	一一对应、基数
计算	数的结合	加法、乘法规则、阿贝尔群
重排	置换	双射、置换群
计时	先后	线性顺序

观察	对称	变换群
建筑赋形	图形、对称	点集
测量	距离、广度	度量空间
移动	变化	刚性运动、变换群、变化率
估计	逼近、附近	连续性、极限、拓扑空间
挑选	部分	子集、布尔代数
论证	证明	逻辑连词
选择	机会	概率（有利/全部）
相继行动	接续	结合、变换群

显然这些概念决不是一起形成的，而且其中许多概念是经历极为曲折的过程才逐步得到的，如群与拓扑空间。

最早形成的恐怕是计数的观念以及一些直观的几何图形的观念，这构成数学的原始对象——数与形，但还没有形成一门学术。只有在产生系统的技艺与操作之后，才形成数学最原始的对象——计算技术（算术）以及测量与绘图技术（测绘术），这些实际上是技术而不是学问。产生数学学问需要对于技术操作的对象有更深入的理解，至少要发现它们之间的“关系”：计算的对象是数（很长时间是自然数，即正整数），它们之间的关系构成数学的一个分支——数论；测量及绘图的对象是图形，图形之间的关系（相交、平行、垂直、相似、大小度量的比较）构成数学的另一分支——几何学。因此，数学从一开始就并非一门科学而是一门技术与理论的混合体系。对于许多民族来说，最早的数学几乎都主要是技术。中国古代数学长时期以来被称为算学，从一个侧面反映出它的技术特征——操作的、技巧的、实用的，而很少或根本不考虑其运算对象——数的性质。中国的数往往带有神秘的意味，当然，这种“数学”

并非我们所讨论的数学。实际上，前史时期的数学主要是民族数学或文化数学，在各种文化的发展过程中，各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术，包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等，基本上属于实用技术，它们从技术上讲大同小异，但数学知识是零散的，而且反映了较大的文化差异。另一方面，也出现神秘的占星术、数秘术、占卜术等伪科学，其中也有个别涉及数学的内容，如二进制等。各种建筑及装饰艺术品上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽。

只有古希腊，术及学的划分是比较清楚的。它们把计算技术叫 *logistica*（应译成算术），而 *arithmetica* 则指数论。后来对数论 *arithmetica* 这个词广泛使用，我们也译成算术，增加了混乱。而一直到 19 世纪，高斯（Gauss, Carl Friedrich, 1777—1855）的名著《算术探究》实际上是数论划时代的著作，当时高等算术无一例外地均指数论。

古希腊几何学更是独一无二，欧几里得的《几何原本》几乎概括了当时所有理论的数论及几何学，成为近代西方数学的主要源泉。值得注意的是，即使在欧几里得的《几何原本》中，作图的技术与定理的证明是并重的，而且的确给后人带来一系列脱离实际的数学问题。尽管由于柏拉图的倡导，理论数学与实用数学确有某种程度的分离，但它们仍然通过不同途径传到近世，构成一种混合形态的数学。除了数论及几何之外，属于“四艺”的另外两门数学是天文及音乐（应译为乐理），在天文学中形成球面三角这种“测天”技术，而音乐实际上是一种宇宙和谐的理论。按照波丢斯（Boethius, 约 480—525）的同时代人卡西奥多（Cassiodorus, 约 490—575）的见解，“音乐是有关数的一门科学”。“中世纪从古代继承了一个观点，

即音乐并非一种自由创造的艺术，而是一门把数学理论付诸实用的严谨的科学。”其中主要是比例理论。这些数学都是些理论与技术的混合物，而更偏重于理论。在实用技术上数学沿着另外一条途径也有相似的发展，值得一提的是透视法，它是许多画家长期实践的产物。

数学经过长时期的发展之后，正式成为一门学科，其主要标志是：

——建立数的表示及计算方法。

——对于一些问题有较系统的方法。

这使数学技术部分初步形成。而欧几里得《几何原本》的问世，则使理论数学有了一个原型。世界各国数学发展的状况不同。古代数学的主要领域是算术及几何，希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题。这些问题对以后的数学有很大影响，但不一定很重要。比较重要的数学是计算，特别是解方程。中国、印度、阿拉伯的数学，偏重于计算及实际问题的解决。

一直到17世纪，数学的对象仍然相当庞杂，这可以从德沙列（Deschales, C. F. M. 1621—1678）写的《数学课程或数学世界》中看出，除了算术、三角和对数之外，还包括实用几何、力学、静力学、地理、磁学、土木工程、（大）木工、石工、军事建筑、流体静力学、液体流动、水力学、船体结构、光学、透视法、乐理、火器及火炮设计、星盘、日晷、天文学、日历计算和占星术，最后他还把代数、不可分量理论、圆锥曲线理论和诸如割圆曲线和螺线那样的特殊曲线包括在内。由此可见，数学实际上是个极为庞杂的领域，很难说有什么统一的对象。当然我们必须承认理论数学的体系在欧几里得

时代已初步建立起来，并成为以后数学研究的楷模。

2. 近代数学的成果

从 16 世纪末到 17 世纪初，数学进入近代数学时期。由于符号代数的发展，坐标几何（解析几何）的出现，特别是微积分的形成，17 世纪被称为数学的英雄时代。微积分的方法，在 18 世纪到 19 世纪成为解决实际问题的强大武器，推动了天文、力学、物理学的发展。数学在更高的层次上与应用密切相关，实际问题也促使新的数学部门出现，如计算天体运行轨道产生了微分方程及线性代数，计算沿着什么样的曲线下降最快（时间最短）产生了变分法，工程设计产生了画法几何等等。

近代数学与古代数学比较起来，有许多明显的特点：

(1) 符号化。首先是从算术的数的运算过渡到代数的符号运算，这对数学是一场革命性的变化。符号代数学的划时代著作是韦达（Vietè, Francois, 1540—1603）在 1591 年出版的《解析法入门》，这本书分成八章，其中把解析法分成三类：

①把问题化成方程法。

②由方程推出定理法。

③解方程的方法。

韦达在这本书的最后讲，使用这三种方法及原则没有解决不了的解析问题。他把计算分成两类，除了原先的数值计算之外，加进了符号计算，从而为数学开辟了一个新天地。

不仅如此，符号代数学的引进还大大促使数的概念的扩张。原来不合法的负数、虚数等等，因其运用整数与分数的运算原则，而被承认为合法。符号化也促使形式化的发展，如二项式定理指数可由正整数推广到负数、分数甚至更一般的实数、复数。这种形式的推广，促进了不同问题的解法统一成共

同的算法，使方法大大系统化和简化。

仔细观察一下数学史，数学的发展是伴随着漫长的符号化进程的。正是由于大部分符号化在16世纪末已出现，才产生17世纪的数学黄金时代。仔细想一下，符号化经历下面的进程：

①数字及其表示的符号化。

②运算的符号化。加、减的符号“+”、“-”早在15世纪中期就已经有了，16世纪已普遍使用。乘、除的符号“×”、“÷”则稍晚，根号在17世纪也已经产生，乘幂的符号到19世纪初才固定下来。

③关系的符号化。等于、小于、大于是16世纪中期开始引进的。

④区别未知量、已知量、未知量系数的符号，这是韦达的最大功绩。

⑤更一般对象的符号化。如集合、曲线、方程、函数乃至语句的符号化则是比较晚的事，一般到18世纪乃至19世纪才开始萌芽。

代数符号化影响笛卡尔和莱布尼茨产生逻辑符号化的思想，这明确表现在莱布尼茨通过计算来判断是非曲直的想法。这种思想后来发展成数理逻辑的前身——符号逻辑。符号化也是使问题代数化的重要一步，表现在解析几何学的产生上。

（2）几何学出现代数方法。古典几何学采用综合方法，解决问题需要技巧。笛卡尔的解析几何学，把分析方法即代数方法引进几何学，使初等几何学问题代数化、形式化，从而为程序化、为后来的机械化证明奠定基础。但是，从笛卡尔起到19世纪末，综合方法与解析方法一直存在严重的对立。

解析几何学的诞生大大扩展了几何学对象的范围，产生出一般的曲线、曲面乃至高维空间、代数簇及微分流形的概念，为代数几何学、微分几何学奠定了基础。

(3) 由有穷数学到无穷数学的过渡。古代数学回避无穷，但 17 世纪以来，“无穷”大量出现，表现在：

①无穷运算的出现，使无穷级数、无穷乘积、无穷连分数等等成为数与函数的方便的表达式，而且成为有效的形式计算工具。

②无穷过程的运用，证明有普遍性的定理，常用的是数学归纳法。这是 1642 年由帕斯卡首先运用的。费尔马首先运用无穷递降法来证明数论中许多定理。

③无穷大及无穷小量的引入与计算，牛顿及莱布尼茨等人系统地发展了包含无穷小量在内的运算，这就是微积分。由于无穷小量及无穷大的引入，使得新的分析方法具有空前的威力，为数学的广泛应用开辟了道路。

18 世纪数学分析在微积分的基础上正式诞生，它的中心概念是函数。不过在 19 世纪中叶之前，函数的概念并不清楚。实际上，比起数来，函数是一个远为复杂的概念，当时函数虽然通过曲线或者表达式来表示，但是函数实质上由三部分构成：一是定义域，二是值域，三是函数本身。无论是定义域还是值域，都不止是一个数，而是一个集合。定义域和值域确定之后，有远为多的函数。从这时起，结构数学的基础——集合和映射的概念已潜在于分析之中。

17 世纪解析几何学及微积分的建立虽然大大扩大了数学技术的武库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算技术的状态。当时几乎没有专业的数学家，数学家大都是科学家，

数学在他们看来主要是解决自然问题的工具，而纯粹的数学如数论，虽然也有一些进步，在当时不过是数学游戏，大都是业余数学家的玩意儿。数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题，而微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算（*infinitesimal calculus*）。接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效。变分法原文是 *Calculi Variationum*，意即变分演算。微分法、积分法、变分法的名称一直沿用到现在。当时还有一门与微积分平行发展的学科——差分演算。17、18 世纪的概率论实际上是概率演算（*le Calcul des probabilites*），一直到本世纪还有这方面的著作问世，而真正的概率论还是 20 世纪中的事。同样，莱布尼茨有最早逻辑演算的观念，而直到 19 世纪中叶才由布尔（Boole，George，1815—1864）等人实现，这是大家都熟知的事了。

科学革命时期所形成的这些技术学科，后来统称为（数学）分析，在当时，分析与代数的对象是不加区别的。如果有什么区别的话，可以说代数是进行有限的演算，而分析是无穷的演算，这种区别一直到 19 世纪初由柯西（Cauchy，Augustin-Louis，1789—1857）开始对分析的严格化进行尝试才为人重视。实际上，这个问题涉及数学的基础问题：有限演算的规则（如加法交换律）是否适用于无穷的运算（如无穷级数）。人们很快发现有限演算的规则对无穷运算决非畅通无阻。那么仔细考虑一下，有限推理所得出的逻辑规则能否推广到无穷推理或无穷对象的推理，则是 20 世纪数学基础的中心问题之一。在当时，还有一门学科称为“代数分析学”。从欧拉到柯西都

写过这方面的专著，其主要内容是从初等函数到一些特殊函数的演算及公式，这时无论是代数还是分析都主要是“技术”。

但是，分析的技术涉及无穷，在许多方面自然会产生困难。不过18世纪的大数学家们不顾这一切，他们采取某种形式化的做法并取得巨大成就。因此，他们不太为严格与否操心，这充分表现在达兰贝尔（D' Alembert, Jean le Rond, 1717—1783）的话中，“前进，你就会有信心”。

不可否认，形式化对后世的数学有很大影响。18世纪末到19世纪初，一批美国数学家正式推出“形式永恒性原理”，明确提出加法、乘法运算的“交换律”、“结合律”和“分配律”。表面上，这似乎是尽人皆知的废话，不过，从历史上看，它们向数学对象从数中解放出来而成为一般抽象对象迈出了决定性的重要一步。这些规律及其推广也成为定义代数结构的公理了。

17、18世纪的数学基本上还是算学，其中数学分析取得了重大突破，我们列举下列主要的成就：

①初等函数微分法和积分法，微积分基本定理。

②有限差分法。

③函数的泰勒展开。

④欧拉—马克劳林（Maclaurin, Colin, 1698—1746）求和公式。

⑤求积分和解常微分方程的初等方法，如部分分式法、降阶法。

⑥创造摄动法，一译微扰法。

⑦变分法的诞生，把变分问题化为解常微分方程。

⑧引入偏微分、偏导数，以及求偏导数的可交换公式。

⑨引入偏微分方程，初步研究求解方法，建立特征线理论，求解一阶偏微分方程。

⑩引入一批重要的特殊函数，如 B 函数、Γ 函数、勒让德（Legendre，Adrien Marie，1752—1883）函数、贝塞尔（Bessel，Friedrich Wilhelm，1784—1846）函数以及超几何级数等。

3．遗留的数学问题

18 世纪留给 19 世纪的问题很多，简单概括一下，其中比较重要的有：

（1）数论

①整数的可除性问题。

②整数的加法表示问题：华林（Waring，Edward，1736—1798）问题和哥德巴赫猜想。

③不定方程求解：费尔马大定理和莫德尔方程 $y^2=x^3+k$。

④用整系数二次型表示整数的可能性及表法数。

（2）几何作图

用圆规、直尺作图：正多边形与希腊几何三大问题；月形求方问题。

（3）代数方程和代数方程组求解

①求代数方程的根。

②代数方程组的变元消去法。

（4）无穷幂级数、无穷乘积等表示

函数的展开以及无穷级数的求和。

（5）积分计算

特别是椭圆弧长的计算以及其它初等函数的积分。

(6) 常微分方程和偏微分方程求解

特别是力学、物理学和天文学中的弦振动方程、波动方程、拉普拉斯方程等。

(7) 欧几里得第五公设问题

(8) 高次曲线及曲面的分类

代数曲线的奇点。

(9) 极小曲面

(10) 重大的数学物理问题

①经度问题。

②行星及卫星的轨道计算问题。

③三体问题。

④摄动问题。

⑤太阳系稳定问题。

⑥转动流体的形状问题（地球形状问题）。

⑦大地测量与绘图问题。

所有这些问题都对以后的数学产生不同程度的影响，例如三体问题推动组合拓扑学的产生。许多问题的研究一直延续到现在，例如极小曲面问题。同时还有一些问题尚未解决。

1.2 19 世纪的数学

除了少数问题之外，大部分问题尤其是分析和几何问题在 19 世纪得到解决或取得重大突破。这些问题连同近代数学的成就构成后来数学发展的基础。但是必须看到，18 世纪末的数学和 19 世纪数学有着极大的不同，更不用说 20 世纪了。主要是 18 世纪末的数学仍是计算技术和自然科学的分析工具，虽然已经产生了先进的方法，但是 18 世纪末的数学家们感到

数学的矿脉已经挖空，他们已经没有什么可以去做。这反映在18世纪80年代尤其是90年代数学成果远较前后时期为少。这反映出数学一方面缺少自己的固有对象和问题，另一方面缺少系统的理论和严格的基础，只是陷入零散问题的"题海"之中，没有全局的、总体的看法。

随着19世纪的到来，这种局面立即改观。1801年高斯的《算术研究》为数论建立一个体系。同时，综合几何学的复兴也为几何的大规模发展打下基础。19世纪分析方法及数学分析基础的建立推动了函数论的建立，并为以后的结构数学的产生及发展开辟了广阔的前景。

1．19世纪数学的特点

19世纪数学本身发生了可以说是革命性的变化，主要有下面四个特征：

（1）新题材、新领域、新分支大量涌现。

19世纪之前，大致是算术及数论、几何以及17—18世纪发展起来的代数及分析四大领域，它们的研究对象大都停留在原来比较自然的对象——数、量、形上面。到19世纪，数学思想得到空前的解放，特别表现在引进许多新的研究对象，特别是：

①数的概念的扩大，产生负数、虚数、无理数、复数乃至四元数、八元数，而且从无理数和虚数中分出各种代数数以及超越数，伽罗华还引进所谓伽罗华虚数，实际上是有限域的元素。量的概念扩大，产生向量、张量等。从这些概念出发，出现新的代数及分析领域。

②演算对象的产生与扩大。对代数方程及代数方程组的解法和解的性质的探讨产生出一系列新对象：从线性方程组导致

行列式、矩阵、线性空间、线性变换、线性型与多线性型等概念与理论的出现，从代数方程导致复数、对称函数、置换等概念的引入以至伽罗华理论与群论的创立，高次联立代数方程组则导致代数几何的产生，齐次多项式引出型论和不变式论。

③形的概念的扩大。几何对象一直是三维空间内的图形，特别是曲线和曲面。黎曼把几何对象推广到 n 维空间，而且进一步推广到流形。

④函数概念由特殊函数扩大为一般函数。19 世纪由椭圆积分的反演产生椭圆函数，后又推广到超椭圆函数、阿贝尔函数，从而代数函数论得到蓬勃发展。一般函数论在 19 世纪后期全面发展起来。正因为数学新对象大量涌现，研究它们的新学科自然也就应运而生了。

例如到 19 世纪，数论已经由问题汇编发展成初具规模的对象理论。从方法上来分，引进代数数论、超越数论、二次型及高次型算术理论；从演算对象看，不定方程扩大成庞大领域，出现丢番图逼近理论、几何数论、连分数算术理论等等新兴学科。

几何学从综合几何的复兴，出现射影几何、反演几何、非欧几何以及各种特殊对象的几何——线几何、圆几何、球几何等。由于解析方法的引进，解析几何在 19 世纪已经完备和定型化，从中发展出代数几何学与微分几何学这两大领域，成为 20 世纪几何学的基础。但是曲线及曲面几何仍是主要对象。拓扑学及运动几何学也有所发展。几何学的研究在 19 世纪中仍超过数论、代数和分析的总和。

代数学仍然以方程求解及方程论为中心，出现伽罗华理论以及置换群及抽象群和群表示理论。方程求解问题并不因伽罗

华理论而告终，它沿着几个方向继续发展，用超越函数解代数方程以及用数值方法求解。方程的解的研究到 19 世纪末仍是重要课题。除了方程以外，线性代数与双线性代数、行列式与矩阵、四元数与超复系等都为代数带来多样化。不变式论被第二次称为近世代数，而真正的近世代数——抽象代数，却萌芽于这些新的对象及理论当中。

19 世纪常被称为分析或函数论的世纪，但这是 19 世纪末的数学家的观点。当然实分析的多样化发展，特别是微分方程的求解引出大量的特殊函数，而从实到复的过渡引出复分析的有力工具。特别是椭圆函数及阿贝尔函数是 19 世纪分析的中心。到魏尔斯特拉斯解析函数论只是大量特殊函数的一个简要概括。一般的解析函数论只有到 20 世纪上半叶才有较大的发展，而它们却植根于特殊函数的多样性之中。例如整函数基本定理——毕卡（Picard, Emile, 1856—1941）大定理在 1879 年是用椭圆模函数证明的。

20 世纪数学的主流——结构数学大都源于这种多样性，20 世纪的数理逻辑及数学基础也来源于 19 世纪的先驱，从布尔到康托尔。可以说正是 19 世纪数学题材的多样性造就了现代数学的丰富内容。

（2）数学对象及方法的推广。

数学与自然科学不同，并不以客观实在为对象。在以前，数学对象受制于哲学观念及古老的规定，到 19 世纪，数学家的思想逐渐打破这种陈旧的框框，无疑，每一次打破都引起一场风波、一场辩论，但主流是数学对象的扩大化最终取得胜利。几何学最明显，19 世纪突破二维和三维欧几里得几何的框框，出现各种各样的“非欧几何学”，一是不遵守平行公设

的通常非欧几何，二是不遵守三维限制的高维几何学，三是不遵守阿基米德公理的非阿基米德几何，四是复数的几何学，如此等等。在观念上也有重大突破，空间不一定由点构成，从而出现直线几何学、圆几何学等等。图形不一定非装在大空间里，出现流形的概念以及内蕴几何学或自然几何学，还可以引入无穷远点、无穷远线等等理想元素，形成新的几何对象，最后研究一层一层的结构，其中最基础的是点集及抽象集合。

在19世纪，人们一开始还是习惯于具体的、特殊的对象，避开抽象的、一般的对象。但随着认识的深入，才逐步接受那些奇异的甚至病态的对象，如处处连续而处处不可微的函数，填满正方形的曲线等等。但到头来，数学的深化不能不把它们接纳进来，而且在以后的发展过程中产生意想不到的应用。

(3) 层次化的出现与严密性的考虑。

18世纪以前的数学家大都是解决问题特别是计算的能手，而解决问题大都是用特殊技术、特殊方法去攻特殊对象的一些特殊问题。到19世纪，数学家开始逐步考虑更高层次的问题。如求解代数方程，要考虑根与系数的关系问题，对于微分方程，研究解的存在性与唯一性问题。研究题材的转变不仅是过去盲目求解失败的经验总结，也是为寻找新的求解方法从理论上扫清道路。思想方法的改变也带来对方法的严密性的追求。

19世纪分析代替几何在数学中占据统治地位之后，分析的有效性不成问题，但严密性却受到挑战。因此，19世纪整个世纪不断对这个问题进行探索，最终由魏尔斯特拉斯等人解决，但是留下的无穷集合论问题却产生无穷的麻烦。

(4) 统一性的追求。

19世纪数学分支的爆炸性增长，使得数学专业化日益严

重，形成相互隔离的局面。19 世纪初，数学家已经被分为分析家及几何学家，前者也包括数论及代数专家。到 1870 年以后，由于群的概念的成熟，一些大数学家，特别是若尔当、克莱因（Klein，Felix，1849—1925）、李、庞加莱等人，尝试以群的观念来统一数学，取得了相当的成功。群的概念不仅联系代数方程，而且也用于微分方程、函数论，特别是几何学，从而涵盖了大部分当时数学。另一方面，19 世纪四大领域外的四大分支：代数数论、代数函数论、代数几何学与代数不变式论，直接导向当时的理想理论，进而发展成后来的交换环论以及部分域论。对这些部分统一性的抽象化最终导致 20 世纪结构数学的萌芽。

对于 19 世纪数学的成就，我们不可能给予全面的论述，但是作为通常数学史的补正，我们系统地叙述一下 19 世纪最辉煌的两大领域——分析与几何学以及经典的数论。

2. 数学分析

通常认为 19 世纪数学的三大成就为：非欧几何的建立、群论的产生与数学分析的严格化。但是这种说法并不确切，也不符合 19 世纪数学的实际。在 19 世纪数学的历史中，对后世影响最大的莫过于分析技术的进步。由于分析技术的进步，数学家对一些理论问题开始关注，最后才导致分析的严格化及现代数学的产生。由于篇幅的限制，我们只能列举其中最重大的成就。

（1）求解数学物理偏微分方程。

除了继续求解 18 世纪已提出的波动方程和位势方程之外，19 世纪提出热传导方程以及弹性介质方程组，纳维尔（Navier，Claude，1785—1836）—斯托克斯（Stokes，George

Gabriel, 1819—1903）粘性流体动力学方程组以及麦克斯韦（Maxwell, James Clerk, 1831—1879）方程组。在求解前三种方程方面，取得重大成就。特别是通过坐标变换与分离变量法把偏微分方程化为常微分方程，从而得出各种特殊函数，例如勒让德函数和贝塞尔函数。对各种特殊函数也进行了一系列研究，特别是用幂级数与无穷乘积来表示。在研究把解展开成三角级数及其它特殊函数级数的问题时，开创了付立叶（Fourier, Jean Baptiste Joseph, 1768—1833）分析这个极为重要的领域。

（2）付立叶分析。

付立叶的三角级数展开不仅解决了一系列数学问题，而且还提出了一系列理论问题，特别是一般函数展开的可能性，级数的收敛性和可表示性以及积分理论等等。这些问题导致三角级数理论、黎曼积分理论、集合论以及勒贝格积分理论的产生与发展。

（3）建立多元函数微积分以及关于线积分、面积分及体积分的格林（Green, George, 1793—1841）公式、高斯定理等。

这些是20世纪外微分法的前身。这些公式在求解波动方程及位势方程方面也发挥重要作用。

由于位势方程的求解，导致狄利克雷原理以及积分方程的研究，并建立经典的位势理论。

（4）复分析的建立。

19世纪最重要的技术进步是把分析由实数域推广到复数域，由此导出一系列惊人的成就。残数公式是积分法的一大进步，而把无穷幂级数展开推广到复变元则使许多分析问题获得解决，同时产生一系列新见解，其中突出的是黎曼 ζ 函数以及椭

圆函数及其推广。复分析还为保角(共形)映射奠定分析基础。

（5）无穷级数。

19世纪20年代之前，数学家大都任意地使用发散级数。此后，数学家开始注意无穷级数的收敛和发散。他们引入许多判定收敛和发散的判据，并且只合法地使用收敛的无穷级数。早在19世纪40年代，对于函数级数，魏尔斯特拉斯引入一致收敛的概念及逐项可积和在积分号下求导数的条件。他还引进任意函数的多项式级数表示问题。特别是他引进复幂级数作为解析函数元，使之成为复变函数论的基础。

1886年庞加莱为合理使用发散级数奠定理论基础，建立渐近分析（*Asymptotics*）这一领域，它们在函数表示和近似计算中有重要应用。

1880年起对于无穷级数建立的各种可和性理论，对于20世纪数学分析有着重要价值。

（6）椭圆函数及其推广。

1828年阿贝尔和雅可比独立地把椭圆积分反演得出椭圆函数，它不仅在应用上具有重大意义，而且对复变函数论、数论、代数方程求解、代数函数论、自守函数论乃至代数几何学的发展有着不可估量的价值。到20世纪，从孤立子到费尔马大定理都与它有关。

（7）常微分方程。

18世纪的初等方法限制了常微分方程求解的范围。到19世纪，由于级数解及特殊函数大量出现，线性常微分方程的初值问题和边值问题大体上获得解决。1836年，斯特姆(Sturm，Charles，1803—1855）和刘维尔（Liouville，Joseph，1809—1882）建立了本征值问题系统理论，直接推动了正交函

数论及一般付立叶分析理论的发展，为希尔伯特空间理论奠定了基础。

由于常微分方程与复变函数论的结合，1866年，德国数学家富克斯（Fuchs, Lazarus, 1833—1902）建立了常微分方程的解析理论，它结合高阶线性常微分方程、解析函数的奇点以及黎曼的单值群理论，为自守函数论开辟了道路。

19世纪末，庞加莱研究常微分方程定性理论以及动力系统理论，直接预示20世纪的拓扑学以及动力系统和遍历理论。当代热门的分叉理论和浑沌理论也首先见于庞加莱的著作。1892年，俄国数学家李雅普诺夫（Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich, 1857—1918）发展了常微分方程的稳定性理论。在19世纪，数学家们对于常微分方程的周期解和法国数学家班勒卫（Painleve, Paul, 1863—1933）对于没有可去奇点方程进行了系统研究。这些研究推动了后来非线性方程理论及大范围分析的产生与发展。

在19世纪，常微分方程理论也开始建立。其中包括存在性定理的证明以及对应于代数方程的伽罗华理论和常微分方程的毕卡—维西奥（Vessiot, Ernest, 1865—1952）理论。

(8) 变分法。

19世纪变分法最重要的成就是引入一些重要的变分原理以及魏尔斯特拉斯建立变分法的严格基础。希尔伯特对于狄利克雷原理的挽救推动变分方法在20世纪的热心研究，并直接导向泛函分析。

另外，数学分析在函数逼近、有限差分法、连分式展开、算符演算、积分变换、数值计算等方面也都取得重要成就。

在理论方面，19世纪对分析的严格基础进行了深入的探

讨，这直接导致世纪末实数理论和集合论的产生。另一方面，分析的核心对象是函数，而函数论是 19 世纪的一大成就：一方面是魏尔斯特拉斯的解析函数论，在 19 世纪末出现关于整函数及亚纯函数的研究，以及在数论上的应用。另一方面是黎曼的代数函数论以及黎曼面理论，它通过各种途径在 20 世纪得到进一步发展，特别是代数几何学以及算术和交换代数的方向。

数学分析在 19 世纪数学中的核心地位不仅表现在理论方面、技术方面和应用方面，而且还表现在对数学其他领域的影响，典型的是微分几何学和解析数论。

微分几何学是随着微积分一起产生的。有了微积分这种有力的工具，加上解析几何带来的坐标表示，不难求出给定曲线的切线、曲线的长度、曲线的曲率（弯曲程度的度量），对于三维空间中的曲面，可以具体求出曲面在一点的切平面、法线，并研究曲面上曲线的一些性质。

1827 年德国大数学家高斯引进曲面的“内在”几何学，他用曲线坐标（好像球面上经纬度）来代替三维笛卡尔坐标。他证明曲面在一点的全曲率（即高斯曲率，为两个主曲率的乘积）只依赖于曲面上两点间的无穷小距离平方 ds^2，与把曲面如何嵌入到三维欧几里得空间的方式无关。黎曼发展了高斯的思想，把几何从二维、三维推广到任意维，把曲线、曲面推广到任意维流形，从而开拓了黎曼几何的新篇章。它的主要工具是张量分析。

自然现象中，比如时间、距离、质量等等我们通常用一个数量来描述，但是要描述物体的运动，用数量就讲不清楚了，就得用向量（一个向量既有长度又有方向）。要描述许多物体的运动，或一个刚体上每点的运动，就需要向量场（空间中每

一点有一个向量，诸向量连续地变化)。描述更为复杂的现象，就要用张量和张量场。例如相对论中用张量表示时空和动量、能量。有了向量和张量，相应就有向量分析和张量分析。

在黎曼的影响下，德国数学家克里斯托费尔（Christoffel, Elwin Bruno, 1829—1900）把 ds^2 推广成一般的形式 $\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$，研究在局部坐标变换之下，两个 ds^2 是如何相互变换的。这样他引进了以他的名字命名的克里斯托费尔记号 Γ^i_{jk}，利用这个记号他能够对于向量场进行微分，即所谓协变微分法。1887 年意大利数学家里奇（Ricci, Curbastro, Gregorio, 1853—1925）定义了张量概念，在克里斯托费尔公式的启发之下，定义了张量的一般运算，即协变微分或绝对微分法。有了这个工具，对于黎曼几何的研究对象黎曼流形（即微分流形具有一个指定的正定黎曼度量 ds^2)，也可以定义类似于高斯曲率的东西。但这时曲率不是一个数量，而是一个张量，称为曲率张量（或黎曼—克里斯托费尔张量)。如果曲率张量处处相等，则黎曼流形称为常曲率的，非欧的双曲几何学（罗巴切夫斯基几何学）就是研究曲率小于 0 的常曲率空间，而非欧的椭圆几何学则是研究曲率大于 0 的常曲率空间。普通欧几里得空间，处处曲率都等于 0。

3．几何学

（1）几何学的对象。

几何学研究的对象应该说是“图形”，而不是有人所说的“空间”，特别是现实的物理空间。长期以来，空间，特别我们所在的时空是哲学和物理学的对象。不少人也把几何学列为自然科学或物理科学当中，只有到 19 世纪才有数学研究的数学空间。

即使在三维空间中，我们也有千姿百态、多种多样的图形，单是曲线和曲面就数不胜数。图形的性质要比数丰富得多，因此，数学的大部分内容归诸于几何学也就不足为奇了。到 19 世纪末，数学中几何的内容大大超过数学中其他部分——如数论、代数、微积分、函数论等学科的总和，而只有到 19 世纪末，由于基础的研究，才又返朴归真。毕达哥拉斯的“万物皆数”再次借尸还魂，几何学又归结到数的研究之中，这种情况才有所改变。

数和形作为数学两个最原始的对象，从一开始就显示出极为明显的不同：数的概念远为抽象，而形的概念则完全直观。但是，仔细研究一下，几何图形是一个原始的但却十分复杂的对象，因此，我们可以期待几何学包含更丰富的信息。

数和形这两类对象，很容易就会发现它们之间有两大区别：

数是离散的或分立的，形是连续的或连通的。这里要声明的是，这里的数不是指实数集合或实数直线，也不是讲复数集合，它们其实并不是现代数论直接研究的对象。数论讨论的多是整数、有理数、代数数以及个别的超越数，而图形也可能有两支或多支，甚至孤立的点，但总体上是连续的图形。

数是 0 维的，图形是一维、二维乃至高维的。这里我们不考虑现代热门的分维与分形，它们是具有非整数维的点集。

从以上两点，我们已多少感到几何学的形与数的明显差异：

连续的图形中，数好像是一些格子点，由图形的几何性质，是否对其中的格子点说点什么？

0 维是一维、二维、三维的特殊情形，也是极限情形。由

0维的数论能不能推广出一维、二维乃至高维图形的“数论”来？反过来，由高维的几何能不能推出0维的“几何”呢？从哲学上讲，这就是追求统一性，而数学中一旦认识到这种统一性，我们的认识就上了一个新台阶。

(2) 几何学的种种问题。

可以想像几何学的问题和数论的问题全然不同。在讨论数论问题之前，对于数的抽象、数的表示、数的演算以及特殊的数的性质要有一些准备，而几何学则没有这一套。平面上随便找三点，只要不在一条直线上，就可以作一个三角形。这样我们面对的是无穷（不可数无穷）多三角形。实际上，即使是“特殊”三角形，如直角三角形、等边三角形、等腰三角形，也是各式各样。因此，我们首先研究的是它们的共性。

①测量与求积问题。求一块土地的面积，求容器的容积，求曲线的长度等，这些都是最古老的问题，也是各民族共同的问题。但是这些问题是很难的问题，随着时间的流逝有着各种方法的发明，尤其是直线图形。在古代数学、尤其是中国的数学中有着卓越的解法。

②作图问题。这是希腊数学的重点，尤其是限制用圆规、直尺时，引出一系列历史上影响很大的作图问题，其中包括三大几何问题，正多边形的作图问题，月形求方等问题。这些问题后来成为代数的伽罗华理论的一部分，不过从实用的角度讲，不限于用圆规、直尺时，仍然有许多发明。圆锥曲线的作图以及高次曲线的作图导致一些绘图工具和仪器的发展。

③确定位置问题。天球及地球上点的位置确定，导致坐标观念的产生以及坐标（解析）几何学的发展。

④图形表示问题。一个是地图绘制，一个是工程制图，再

加上艺术家的美术创作，都涉及立体投影问题，这些导致射影观念及射影几何学的产生。

⑤几何量的理论。上面四类问题都涉及几何学的量化。正因为几何量不能用数表示，才导致第一次数学基础危机。由于量本身需要单位，不同的量不能加以比较，这反过来长期束缚西方数论的发展。他们的几何式数论只考虑 x，x^2，x^3，而对高次幂则不予考虑。可是他们却发展出细致的比与比例理论，这后来导致实数理论。

⑥图形性质的刻画。有些几何性质非常直观，例如图形的对称性、凸性、平直或弯曲性、连续变形性等，但是通过数学加以研究，建立概念、理论和方法，则是很不简单的事，一直到19世纪末，这些研究才导致群论、凸体几何、微分几何、拓扑学等学科的建立。而最早纳入公理体系的则是图形之间的相关性质，如相交、平行、垂直等性质。另外还有与度量性质有关的极大极小问题，如测地线、极小曲面等。

⑦图形的比较和分类。如图形的全等、相似、等积等以及在某种等价条件下的分类。这些导致几何变换理论、变换群理论以及射影几何学、仿射几何学、共形几何学和解析几何学、代数几何学中的分类问题。

⑧枚举与计数问题。如凸正多面体有5种，一般正多面体有9种，以及两条曲线的交点个数问题。

(3) 19世纪的几何学。

19世纪是几何学的黄金时代。据统计，19世纪的所有数学文献中，几何学的文献数量占总数的一半以上。几何学不仅在文献数量上遥遥领先，在质量上也取得许多突破性的进展。这一时期几何学的特点在于，几何学对象的扩大，几何学研究

方法的多样性，以及几何学的成果多姿多彩，美不胜收。特别是几何对整个数学产生了持续的、不可忽视的影响，为 20 世纪结构数学的产生奠定基础。19 世纪几何大致可分三个时期：

①前期（1800—1840）。这一时期的主要特点是综合几何学的复兴及其与解析几何学的对立。解析几何学的方法虽然精细而有力，但在许多问题上未免显得间接而繁琐，在研究图形过程中摒弃了我们的直观而只是诉诸机械的计算，而且在计算过程中也看不到其几何的意义。这就导致许多数学家倡导综合的方法即不用坐标的方法，特别是这种方法导致射影几何学的产生。射影几何学在 17 世纪已初具规模，但在解析几何学的强大攻势下湮没无闻。一些著作到 19 世纪中才被发现。这时法国数学家庞赛莱（Poncelet, Jean Victor, 1788—1867）已经建立起自己的射影几何学，这标志着综合几何学的新生。同时与之对立的解析几何学也有巨大的突破，一是各种坐标系以及坐标变换方法的出现，二是用分析方法得出许多新的概念并有各种应用。至此解析几何学的体系成熟，成为研究几何学的主流，并为代数几何学、微分几何学、线几何学以及其它非点几何学奠定基础。

②中期（1840—1870）。这一时期几何学产生了革命性的变革，打破传统欧几里得几何学的一统天下，这就是非欧几何学的产生以及黎曼对几何学观念的五大革新：

——提出黎曼式的非欧几何学，从本质上补充了罗巴切夫斯基几何学，显示出欧氏几何学在非欧几何学中是一种特殊情形。

——发展了高斯的曲面论，创立了内蕴几何学，以流形为研究对象，从此几何学由图形的研究转变为对空间的研究。

——突破空间局限于现实的三维空间的限制，几何研究对象扩展成为任意维的，这导致后期的高维几何学的发展。

——明确区别几何对象的拓扑性质及度量性质，黎曼应该说是现代拓扑学的缔造者。

——通过复分析方法，把解析几何学引向代数几何学。

这样几何学研究的对象一下子大大膨胀起来，形成了多种多样的学科。除了上面提到的欧氏几何学、平面几何学、立体几何学、球面几何学、非欧几何学、高维几何学、拓扑学、射影几何学、解析几何学、微分几何学（1894 年才有这个名称，当时称为无穷小几何学）等之外，还有反演几何学、线几何学、运动几何学、代数几何学等，到后期还衍生出圆几何学、球几何学、构型几何学等。这使几何学出现了精彩纷呈的多样化局面。

③后期（1870—1900）。这一时期几何学发展的特点是一方面继续研究中期所产生的一系列对象及方法，一方面寻求多样几何学间的统一性以及几何学的基础。克莱因的埃尔兰根计划把几何学与变换群理论联系在一起，提出用群来统一分类几何学的方案是几何学的重大突破。希尔伯特在 1899 年发表的《几何学基础》为几何学也为整个数学的基础性研究制定了新的纲领，通过几何学公理的增减变化产生一系列新几何学。几何学的公理中几何性质的公理最终归结为基域的代数性质的公理。数域的变化又导致一些新的几何学产生，除了实数域上的几何学之外，还有非阿基米德几何学，而研究最多的是有限域上的几何学——有限几何学。它们对 20 世纪许多理论及应用数学有着重要作用。例如数论编码理论以及组合几何学等等。

4．数论

顾名思义，数学的研究对象当然是数。数是数学中第一个抽象概念，而且也是现代文明特别是信息时代的基础。不过，正如克洛耐克所说："上帝创造了自然数，其它的都是人造的。"在我们承认的数当中，只有正整数 1，2，3，4，…是自然的，其它的如 0，分数，负数，无理数，虚数，复数等等，都是人造的，而且都是经历了成百上千年的岁月才成熟起来，并且取得一致，成为现代的通用语言。实际上，数的扩张是贯穿数学历史中一条明显的红线。

我们这里不必追溯数的概念的产生，这是一个极为漫长的过程。正如伟大的思想家罗素（Russell，Bertrand，1872—1970）所说："不知要经过多少年，人们才发现一对锦鸡和两天同是数字 2 的例子。"知道了 1，2，3，4 之后，还要发现一个方便的计数法以及位值制。不管怎么说，大约到 16 世纪，开始出现统一的数码和计数法，同时发现正整数的标准计算方法，加法与乘法。当然，聪明的中国人早已会减法、除法和解方程了。

一旦数这个数学第一个抽象概念产生之后，立即出现许多数论问题，这些问题大体分成四类：

（1）乘法表示的数论问题。

如整数的可除性、因子分解、素数、同余理论等问题。其中最主要的问题是代数数论中的互反律问题以及涉及素数分布的黎曼猜想。

（2）加法表示的数论问题。

最基本问题是四平方和问题，即任一正整数均可表为最多四个平方数之和。这问题最终由拉格朗日在 1770 年完全证明，可以说是加法数论的奠基性定理。作为这个定理的推广，加法

数论的基本问题是华林问题。原来的华林问题到1986年已彻底解决，但其各种推广则远未完结。另一个加法数论的问题是哥德巴赫问题，它可以说是加法数论及乘法数论的混合问题。

(3) 丢番图方程求解问题。

所谓丢番图方程，就是不定方程，也就是方程或方程组，其未知数的数目大于方程的数目。求多项式方程的整数解及有理数解，这是丢番图方程的主要问题。

(4) 其它数论问题。

如数论函数、整数序列、组合数论以及种种杂题。

19世纪数论发展的特点之一，就是解析方法开始进入数论并取得决定性的胜利。这种技术一直延续到20世纪。

下面我们稍详细地谈几个数论中的重要问题：

(1) 有关素数的问题。

关于素数的问题很多，系统讲起来有：

①素数有多少？欧几里得已经证明素数有无穷多。其后有不少证明，而且引出重要的函数$\zeta(s)$。其后，有一系列更为精致的问题，例如等差级数 $an+l$（a，l 互素，$n=0, 1, 2, \cdots$）中是否有无穷多素数？这直到1837年才为德国大数学家狄利克雷（Dirichlet，Peter，1805—1859）完全肯定地解决，为此他引进著名的狄利克雷 L 函数。

ζ 函数和 L 函数现在已成为解析方法研究数论的核心。

黎曼是现代意义下解析数论的奠基者，生前他只在1859年发表过一篇论文"论给定数以内的素数数目"。在黎曼之前，高斯曾对 x 以内的素数数目 $\pi(x)$ 猜想有渐近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}。$$

黎曼的目标是具体求出 $\pi(x)$，或者更确切地说，与 $\pi(x)$ 密切相关的函数$\zeta(s)$的无穷级数的明显表示。黎曼第一个指出要解决这个问题，首先要研究作为复变量 $s=\sigma+it$ 的 ζ 函数，特别是它的零点的分布。欧拉在证明素数无穷多时已经得出过实变量的 ζ 函数：

$$\zeta(s)=\sum n^{-s}=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{s}}\right)^{-1}。$$

黎曼把 ζ 函数由实变量过渡到复变量，并证明：

ⓐ$\zeta(s)$是 s 的解析函数，除了在 $s=1$ 处有一个单极点之外，在全平面正则；

ⓑ$\zeta(s)$满足函数方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\Gamma(s)\zeta(s);$$

ⓒ$\zeta(s)$在 $s=-2,-4,-6,\cdots$处有零点，且除了 s 的实部属于[0,1]的带状区域时可能有复零点外，没有其他的零点。

黎曼在论文中提出 6 个猜想：

ⓐ他断言，$\zeta(s)$有无穷多个复零点，全都位于临界带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 上。

ⓑ设 $\zeta(s)$在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant1, 0\leqslant t\leqslant T$ 间，零点的数目为 $N(T)$，他用简单的复变函数论推断当 $T\to\infty$时，$N(T)$近似等于

$$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}。$$

ⓒ他定义复变函数

$$\zeta(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

用 ρ 表示 $\zeta(s)$ 的复根，则$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$发散，$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^{2}}$收敛，其中 $\sum_{\rho}$ 表示对所有复根求和。

ⓓ他简单证明 $\zeta(s)$ 的乘积公式

$$\zeta(s)=\zeta(o)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

但他没有考虑 $\sum_{\rho}\ln\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$ 的虚部，也没有考虑其收敛性，因此证明是不完全的。

ⓔ他猜想“非常可能” ζ（s）的全部复零点的实部都等于 $\frac{1}{2}$，这就是通常所说的黎曼猜想。

ⓕ黎曼在论文的后半部得出 π（x）与 ζ（s）关系的公式，即

$$\Pi(x)=li(x)-\sum_{\rho}li(x^{\rho})+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{u^{2}-1}\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}+\text{常数},$$

其中 $\Pi(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$

$$li(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln u}。$$

②素数分布，中心问题是素数定理。由于素数有无穷多，我们只能考虑一定范围内的素数数目，自然我们首先考虑在某数 x 以下的素数数目，这个计数函数我们记作 π（x）。1896 年法国数学家阿达马和比利时数学家瓦莱－布桑（de la Vallee-Poussin，Charles，1866—1962）独立通过整函数理论由 ζ 函数证明了素数定理，即

$$\pi(x)\simeq\frac{x}{\ln x},$$

其中≃表示渐近等于，即是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1。$$

余下的问题就是估计误差项了，也就是

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}$$

的上界，这是当代数论的难题之一。现在已知如果黎曼猜想成立，则

$$\pi(x)=li(x)+o(x^{\frac{1}{2}}\ln x)。$$

而现在的结果与之相距甚远。

③素数判定。欧几里得已经知道如何判定一给定正整数 n 是否素数，即用 $\leqslant\sqrt{n}$ 的每个素数去除 n 看看是否能够除尽。如果都除不尽，也就是余数均不为 0，则 n 是素数，不过这只是原则上可行。而当 n 很大时，则现代最大最快的计算机也不能很快地判定一个大数。例如判定一个 100 位的数是否素数。我们现在只知道 $\pi(10^{18})$ 即 18 位以下的素数的精确数目。

这样，素数判定这个老问题又成为当代数论的前沿，大致有两个方面：

发现新的素数一般判定方法，其中最新的判定方法是用椭圆曲线，从而把能判定的位数由 100 位推到最近的 150 位。

对一些特殊的整数，寻求特殊的方法来判定它是否素数。有两种数是计算机和计算方法的试金石，一是马桑(Mersenne，Marin，1588—1648）数，即

$$2^p-1$$

型的数，其中 p 是素数。到 1996 年底已知有 35 个马桑数是素数，这种素数称为马桑素数，其中第 35 个马桑素数

$$2^{1398269}-1$$

超过 400000 位，是现在所知道的最大素数。

另一类数是费尔马数

$$2^{2^n}+1，\ n=0，1，2，\cdots$$

它是在希尔伯特问题中也提到过的，它在几何作图和编码中有

着重要应用。费尔马曾经猜想，对所有 n，费尔马数都是素数。这个猜想对 $n=0$，1，2，3，4 的确成立。但欧拉证明 $n=5$ 时费尔马数不是素数。从此之后，再没有发现任何费尔马数是素数。但是，至今是否存在无穷多费尔马素数的问题仍然没有解决。另一方面，是否存在无穷多费尔马合数也不知道。不过，费尔马提供了一个把合数进行素因子分解的试验场所。不过，对于费尔马数来说，从完全素因子分解到仅仅能证明它不是素数的情况都存在。在研究素因子分解问题上，椭圆曲线再一次显示了威力。

（2）华林问题。

华林问题是四平方和问题的自然推广。四平方和问题是说任何正整数均可表为四个整数的平方和。这问题是如此之难，以致大数学家欧拉不能给出一个数学证明，直到 1770 年拉格朗日才给出一个证明。同年华林自然把它推广到高次方。他猜想，任何正整数都可表为 9 个非负整数的立方之和，也可表为 19 个整数的四次方数之和。到 1986 年，华林问题完全解决。事实上，解决分两步：第一步是 1908 年希尔伯特一举证明，对任何正整数 k，任何正整数都可表为有限多个 k 次方数之和。这是一个一般的存在性证明，也是 20 世纪数学成果的风格——普遍性和存在性。第二步就是把这个有限多个数目降到最小，具体得出 $g(k)$ 来。这个过程经历近一个世纪，1895 年梅莱（Maillet，E.）证明 $g(3)$ 存在，即 $g(3)\leqslant 21$，至 1909 年威费利希（Wieferich，A.）最终证明 $g(3)=9$，而到 1986 年才有人证明了 $g(4)=19$。

由原始的华林问题还引出另一大堆问题：一个是 $G(k)$ 问题。虽然 $g(3)=9$，但除了 23 及 239 外，都可以表为 8

个非负立方数之和。当整数足够大时，每个正整数可以表为 7 个非负立方数之和。这样我们引进 $G(k)$ 表示每个足够大整数均可表为 $G(k)$ 个非负 k 次方数之和。显然 $G(k) \leqslant g(k)$，因此，存在性不成问题，但计算 $G(k)$ 极难，现在只知道 $G(2)=4$，$G(4)=16$，其他的尚有很大差距。例如 $4 \leqslant G(k) \leqslant 7$，这将是未来的一大难题。还有一个是所谓较易华林问题，求 $V(k)$，即被加的各项前面可以是正号也可以是负号。同样，存在性不成问题，具体定出 $V(k)$ 则并不容易。以上两种推广都十分自然，已属不易，事情并没有到此为止。如果允许分数，3 个三次方即可。18 世纪的代数大师欧拉真正把 1 表示为 3 个分式的三次方之和，这类问题的解决大部分靠初等方法和解析方法，与结构数学关系不大。但华林问题还可以继续推广，如多项式和有理式。希尔伯特问题中有类似的问题，都是通过结构数学解决的。

(3) 丢番图方程。

几乎所有数论问题最终都可以归结为不定方程，也就是丢番图方程的问题。其实，从数论一开始，讨论的都是各式各样的确定方程和不定方程，这种混合的研究从毕达哥拉斯一直延续到欧拉，后来才搞清确定方程和不定方程从各方面看都不一样。确定方程是未知数的数目和方程的数目相等，而不定方程则是未知数的数目比方程的数目多。这样一来，确定方程有一套明确的解法，每一类方程都有固定的方法求解，不定方程则花样翻新。你会解一个不定方程，不一定会解同类方程。因为公元 3 世纪的丢番图传下来近 300 个方程和方程组的问题，其中大部分是不定方程和不定方程组。因此，不定方程在西方就被命名为丢番图方程，而求解不定方程也被称为丢番图分析

了。而由求解不定方程发展起来的当代两大先进手段也被称为丢番图逼近和丢番图几何了。

对于任何丢番图方程或方程组，我们都有下列问题：

①解的存在性问题。对于大多数问题，我们必须首先找到一个判据，表明方程是有解还是没有解。这种问题一般有两种方法，一是初等方法，也就是尝试找出一两组解来。如果成功，当然解就存在了。另外对于较复杂的方程，就需要找理论上的判据了。

②解的数目。肯定了不定方程有解之后，首先要知道到底解有多少。这一般有三种情形：

a. 只有平凡解；

b. 有限多非平凡解；

c. 无穷多非平凡解。

③解的大小。在知道解为有限，或不能确定只有有限多解时，我们往往通过丢番图逼近的方法对于解的大小进行估计，特别是我们希望能够得到一个解的大小的上界。

④解的完全组。这就是把所有的解找出来。如果丢番图方程只有有限多解，我们希望具体把解开列出来。如果有无穷多解，我们希望用公式把解表示出来，当然关键的一步是要证明除了列举的解之外再没有其他的解。对于丢番图方程，能够达到如此满意的结果是不多的，只有勾股方程等少数方程。

这样，最简单的方程按次数来说就是：

$3x+5y=1$,

$x^2-dy^2=1$（佩尔(Pell, John, 1611—1685)方程），

$y^2=x^3+k$（莫德尔方程，k 为某非零整数）。

一次不定方程比较简单，已有系统的理论。二次不定方程则远

为困难，即使是简单的如佩尔方程也花费了许多数学家的精力及上百年的时间，一直到1770年才由拉格朗日完全解决。

从佩尔方程我们已经看出求解二次不定方程已经十分困难，当然把勾股方程稍加推广即可得到一系列的三元二次齐次方程，例如

$$x^2+y^2-2z^2=0, \quad ①$$

$$x^2+y^2-3z^2=0, \quad ②$$

乃至

$$ax^2+by^2+cz^2=0, \quad ③$$

进一步

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx=0。 \quad ④$$

再经过一个世纪的努力，我们总算可以搞清楚它们的解了。实际上，①有明显的非平凡解（1，1，1），因此有无穷多解（m，m，m），m 为任意整数。而②则没有任何非平凡解。这样，我们可得出二未知数非齐次一次、二次不定方程有理数解的大致规律，即它们要么没有解，要么有无穷多解。

与此相反，对于一般三次方程，下面三种情况都存在：

①无解；

②有有限多解；

③有无穷多解。

不过这是对于有理数解来讲的。但是如果说整数解，只有两种情况：

①无解；

②有有限多解。

不过在19世纪，不定方程只有零散结果。

2　19 世纪末的数学基础研究

尽管 19 世纪的数学领域不断扩大，硕果累累，并已产生结构数学的萌芽，但是，作为结构数学的对象，并没有系统地产生。它们与传统的对象相比是具有极为异质的特点，简而言之，经典对象是一个一个的，而结构首先是集合。经典对象研究一些对象的一般的或特殊的性质，而结构对象研究结构，因此结构对象的产生首先仰赖于集合的产生以及公理化定义方法和结构的观念，而这些则是由数学基础的研究产生出来的，而且数学基础与数理逻辑至今还极大地影响着结构数学的发展。

2.1　几何学基础与公理化

第一个几何学公理是由欧几里得的《几何原本》提出的，它在数学史上的地位是无可争议的，其主要贡献大致有四个方面：

(1) 把零散的数学知识组成一门科学体系。

(2) 创立公理方法，从定义、公理、公设出发，建立数学的逻辑基础。

(3) 强调命题的证明，从而把数学变成一门不依赖经验的演绎推理的科学。

(4) 使数学成为严密科学的代表以及训练逻辑推理的教育

手段。

但2000多年来欧几里得体系有着许多缺陷，遭到各方面的批评。例如有的公理（如所有直角都相等）是多余的，有许多概念诉诸直观（如重合）等等，但其主要的缺陷是：

——欧几里得的定义许多是无意义的循环定义，如定义点是没有部分，定义线“有长无宽”等。

——许多术语没有明确意义，实际上是承认直观的考虑，如一点在“两点之间”等。

——逻辑结构的缺陷，在证明的过程中有许多默认的假定，例如在证明命题I16时，不自觉假定直线的无限性。

在希尔伯特之前已有许多人对这些缺陷提出补救的方法，其中主要是德国数学家帕什（Pasch, Moritz, 1843—1930）。帕什在1882年出版的《近代几何学讲义》中认为，几何学的基本命题应该从实验得来，但进一步的展开应遵循纯逻辑推理途径。帕什用一套公理来实现他的计划，他列举12条公理（相应于希尔伯特的结合公理及顺序公理），后来又发表10条合同公理，其中包括阿基米德公理。这样他已经非常接近一个完整的几何学公理系统了。但是，帕什的系统有一系列缺点：

——只考虑线段及平面片而不考虑直线及平面，使讨论变得极为繁复。

——没有把结合公理与从属定理分别列在不同的组中。

——合同公理太多。

在帕什及维纳（Wiener, 1857—1939）等人的影响下，希尔伯特完成了几何学基础的彻底革新。

1899年希尔伯特发表的《几何学基础》不仅彻底清除欧几里得几何学体系中的缺陷，建立了新的几何学基础，而且树

立了现代数学的公理化模式，发展了公理学，推动了整个数学基础的研究。其重点在于：

——提出一些原始的术语，这些原始术语并不作定义。

——原始术语的性质只由公理所反映出来的性质决定。

——公理系统中的每一公理是否符合我们的直观不予考虑，我们只考虑公理系统中的公理是否彼此之间没有矛盾，也就是相容性。

希尔伯特在第一版中提出把点、线、面在上，在…之间和全等作为原始概念，并举出21条公理，其后做了改动及调整。在他生前最后一版（1930）中，提出五组共20条公理的表：

第一组　结合公理（共8条公理）

第二组　顺序公理（共4条公理）

第三组　合同公理（共5条公理）

第四组　连续公理（共2条公理）

第五组　平行公理（1条）

希尔伯特的公理系统非常适合开展一个几何理论。第一版中连续公理组中只有一个，即阿基米德公理。经庞加莱提醒，希尔伯特补上一个完备公理。但是，希尔伯特实际上发现，可以完全没有完备公理，也可以大部分不要阿基米德公理。换句话说，没有连续公理的几何学照样可以行得通。他在《几何学基础》第三、四章中开展了这种非阿基米德几何学。其中他指出在几何学中不一定要用数的概念，只要用几何方法也可定义运算。为此，他引进“线段演算”，定义加法及乘法，以及其逆运算。希尔伯特继而指出通过公理的否定和加减可得到新的几何学。他在第五、六章中建立了射影几何学的公理，这时他除去了第三组公理。他的一个贡献是认识到平面上德萨格公理不

能由平面射影几何学公理推出，因此德萨格公理或其否定可以加入在射影几何学公理当中，建立不同的几何学系统。

希尔伯特之后，掀起一个数学公理化热潮。在欧氏几何学方面，皮埃瑞（Pieri, Mario, 1860—1904）在1899年构造一个公理系统，其中以点及运动作为原始术语，共有20条公理。维布仑（Veblen, Oswald, 1880—1960）的公理系统以点及序为原始术语，有16条公理。韩廷顿（Huntington, Edward Vermilye, 1874—1952）以球及包含为原始术语，有23条公理。帕什之后，还有意大利数学家的许多工作，其中有1891年伏隆耐斯（Veronese, Giuseppe, 1854—1917）发表的《几何学基础》，开始提出非阿基米德几何学。用运动的语言来处理合同的概念的有舒尔（Schur, Friedrich, 1856—1932）在1909年发表的《几何学基础》和瓦仑（Vahlen, Theodor, 1869—1945）在1905年出版的《抽象几何学》。比较起来，希尔伯特比意大利数学家更为保守。他基本上遵循欧几里得几何学的传统，只有三类没有定义的元素——点、线、面以及它们之间关联关系、次序关系和合同关系。

射影几何学的公理化甚至比希尔伯特还要早。1882年帕什的《近代几何学讲义》开辟了一个新方向，他给出一个公理系统。其后皮亚诺在1894年继续这方面的研究，皮埃瑞在1899年完成。恩瑞克斯（Enriques, Federigo, 1871—1946）在1898年，莫尔（Moore, Eliakim Hastings, 1862—1932）在1902年，舒尔在1902年都各自对射影几何学进行公理化。1908年维布仑和杨（Young, John Wesley, 1879—1932）给出射影几何学完全独立的公理系统，用公理化来处理射影几何学的著作有他和杨合著的《射影几何学》Ⅰ，Ⅱ（1910,

1917)。英国著名数学家、哲学家怀特海（Whitehead，Alfred North，1861—1947）在1906年到1907年也提出自己的公理。

从群论角度把几何学公理化始于1907年丹麦数学家赫尔姆斯列夫（Hjelmslev，Johannes，1873—1950）的论文“平面几何学的新基础”，其后为德国数学家托姆孙（Thomsen，Gerhard，1899—1934）及巴赫曼（Bachmann，Friedrich，1909—1982）等人所继续。

对于非欧几何学，对希尔伯特的公理系统需要做改动。双曲几何学较为简单，只需用罗氏公理代替平行公理，其他公理可以保持不动。但是对椭圆几何学就不这么简单了，不仅需要去掉平行公理，加上任意两条直线都有一个公共点（单重椭圆几何学）的公理，而且还必须改变另外一些公理，特别是顺序公理。哈尔斯特德（Halsted，George Bruce，1853—1922）在1904年提出了双重椭圆几何学公理系统，1905年海森伯格（Hessenberg，Gerhard，1874—1925）提出单重椭圆几何学的公理系统。

希尔伯特不仅为欧氏几何学奠定新的公理化基础，更重要的是建立一套模式来处理任何数学对象，并把它们建立在可靠的公理系统基础上。实际上他是第一个分别在几何学和元几何学两个层次上都进行工作的，而且这个工作后来推广到整个数学，从而产生元数学。对于一些对象建立公理是一方面，而希尔伯特还仔细研究另外一方面，也就是一个公理系统的公理之间相互关系。他明确提出对公理系统的要求：

——无矛盾性，也称协调性、一致性、相容性，也就是由公理系不能推出相互矛盾的结论。

——独立性，也就是公理系中没有一个公理可以由其他公

理推出。

另外人们还希望公理系统有完全性及范畴性两个比较好的性质，前者是指凡是有关原始术语的命题或它的否定均可由公理推出，后者是指凡是适合公理系统的模型均同构，也就是满足公理系统的对象基本上是唯一的。由于一般的公理系统不一定有完全性，更难得有范畴性，一般对公理系统不能要求太高。但无论如何，无矛盾性是公理系统的必要条件。因为不满足这条件的公理系统就根本毫无价值。同时独立性与无矛盾性也密切相关。

希尔伯特的过人之处在于他创造了模型的方法。希尔伯特为证明公理系统的无矛盾性发明了构造模型的方法，也就是如果我们对几何公理给出一个算术模型或算术解释，我们就可以相信它是无矛盾的。希尔伯特的具体做法实际上是用解析几何的方法，即把点同一对有序实数（a，b）相对应，把一条直线与一组联比（$u:v:w$）（其中 u，v 不为0）相对应。如果 $ua+vb+w=0$，则点（a，b）在直线上。这样公理中的几何语言均可翻译成实数与方程的语言，即成为等式及不等式，如果这些等式及不等式相容，即推不出矛盾的结果，则原公理系统无矛盾。为了证明公理系统的独立性，他也是创造模型，造出一个模型不满足某一条公理而满足其他所有公理。如果能造出这样一个模型，那就说明这一条公理不可能是其他公理的推论。从建立非欧几何学的模型时起，人们已经这样做了。另外，对伏隆耐斯的非阿基米德几何学，列维－奇维塔已造出一个满意的算术模型。现在希尔伯特构造模型的方法已发展为证明公理系统的无矛盾性及独立性的标准做法。

希尔伯特构造模型时用什么材料呢？这里引用外尔的一段

话："克莱因的非欧几何的模型可以这样解释，表明凡接受欧氏几何包括其中点、线等概念的人，只须把名词换一套也就能够得出非欧几何。克莱因本人宁愿采取另一种用射影空间诸概念的解释。然而，笛卡尔的解析几何长期以来已经提供了更一般、更满意的回答，这个回答黎曼、克莱因以及其他许多人必然已经觉察到：我们构造中所需要的就是实数域。所以欧氏几何中的矛盾必然在作为实数运算的基础的算术公理中表现出来。但是在希尔伯特之前，没有人把这件事说得十分清楚。正是他正式构成完备而简单的实数公理系统。算术公理系统正如几何公理系统一样由几个可代换的部分构成。从纯代数的观点来看，最重要的公理是刻画（交换或非交换）域的公理。任何这种抽象数域可作为构成相应的几何的基础，反之也可以通过满足公理的空间引入数及其运算。"外尔的话显示出来希尔伯特一连串化归思想。几何公理的无矛盾性归结为实数域公理的无矛盾性。希尔伯特本人正是沿着这条路走下去。他在1900年就给实数域一个公理定义。其后莫尔的学派开始对域和群进行公理化，从而为代数结构的公理化奠定基础。

另一方面，还是希尔伯特开始拓扑的公理化。1900年希尔伯特第一个通过邻域定义二维流形。他要求指定一类可允许的一一映射把一个邻域映到二维欧氏平面的若尔当区域上，使任何两个邻域由连续变换联系起来，实际上这就是现代流形的标准定义。外尔在讲授黎曼面课程时，查阅了希尔伯特的论文，并正式写到他的名著《黎曼面的思想》中。紧跟着1914年豪斯道夫正式用邻域定义一般的拓扑空间，开创了一般拓扑学。这样，希尔伯特的公理化思想为整个结构数学奠定了稳固的基础。

2.2 实数理论

无论从数系的扩张、分析的严格化，还是从几何学的公理化，最后数学基础的焦点集中在如何定义实数的老问题上。从数学的历史来看，数学中最重要的5种数的集合，是正整数的集合 N，整数的集合 Z，有理数的集合 Q，实数的集合 R，复数的集合 C。它们之间有如下的集合包含关系：

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C。$$

从代数结构上讲，Q、R、C 均为域，Z 为交换环，N 差不多是有幺元半环。说差不多，因为许多作者认为 N 中包含 0，但是从自然数的历史来看，0 的产生很晚，负数的产生更晚。Z 与 Q 的关系在代数数论中有完美的推广。而到 19 世纪已完整地把分析和代数从实数推广到复数。整个扩张过程只有从 Q 到 R 这一步最为困难。

虽然 2500 多年前已经发现无理量不能用有理数来表示，只有到 19 世纪 70 年代对实数才认真加以“构造”。比较典型的“构造”实数的做法有三种：一种是魏尔斯特拉斯的，一种是康托尔的，一种是戴德金的，他们的出发点都是有理数的集合。由于有理数不足以表示一切几何量，换句话说，并非一切线段长都是有理数，这样直线上点集与 Q 不能一一对应，也就是有理数不足于盖满全直线，中间存在间隙，他们都是设法把间隙补上，但补法不同。

魏尔斯特拉斯和康托尔所依据的原理是分析的，它们是相互等价的四条定理：

——上下确界定理。

——柯西序列收敛定理。

——单调有界序列存在极限定理。

——区间套原理。

戴德金的观点独树一帜，不用实数集合的性质。康托尔和梅莱都从完备性着眼定义实数，这种观点对于点集理论和结构数学的发展关系重大。

1．魏尔斯特拉斯的实数理论

魏尔斯特拉斯采用的方法是区间套原理。所谓区间套，实际上是无穷多个区间，一个套一个，区间越来越小。区间套原理是要求任何一个实数直线上的区间套序列都对应实数直线上唯一一点，它包含在区间套的所有的区间之中。现在考虑以有理数为端点的闭区间，这种有理闭区间套满足：对于所有 n，$I_n=[r_n, s_n]$，$r_n, s_n \in Q$，$I_n \supset I_{n+1}$且$\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-r_n)=0$，不妨简称为有理网。显然有许许多多这样的网。这时我们再引进来网的等价关系。一个网 $\{J_n\}$ 称为比网 $\{I_n\}$ 精细，如果对于所有 n，$J_n \subseteq I_n$。这时我们说网 $\{I_n\}$ 与 $\{I_n'\}$ 等价，如果存在一个网 $\{J_n\}$ 它比 $\{I_n\}$、$\{I_n'\}$ 都精细，或者说 $\{J_n\}$ 是 $\{I_n\}$，$\{I_n'\}$ 的公共细化。在这种等价关系之下，所有有理网划分成等价类，于是定义实数为有理网的等价类。显然有理数也都包含在其中，因为不难设计包含任何有理数的区间套。实际上区间套的观念在数学发展的早期就已经使用，特别是用有理数来逼近无理数时，总是把误差限定在一定范围之中。随着计算技术的进步，这个误差区间也越来越小。早在巴比伦时代，已用 60 进位的分数来作为$\sqrt{2}$的近似值，如

$$1;\ 25=1+\frac{25}{60}$$

和

$$1;\ 24,\ 51,\ 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}。$$

他们可能知道越来越精密的一般逼近算法，对于 $a > 1$，

$$a > \sqrt{a} > 1,$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\ (a+1)\ > \sqrt{a} > \frac{a}{x_0},$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\ (x_0 + \frac{a}{x_0})\ > \sqrt{a} > \frac{a}{x_1},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\ (x_1 + \frac{a}{x_1})\ > \sqrt{a} > \frac{a}{x_2},$$

当 $a = 2$ 时，

$$x_0 = 1;\ 30,$$

$$x_1 = 1;\ 25,$$

$$x_2 = 1;\ 24,\ 51,\ 10。$$

而希腊人可能知道几何均值介乎算术均值和调合均值之间，即

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}。$$

而用到区间套上则是依据波尔查诺和魏尔斯特拉斯定理，有界无穷集合一定有聚点。这是魏尔斯特拉斯在他的讲课中证明的，不过第一次如此明确地用来定义实数首先发表在巴赫曼(Bachmann, Paul Gustav Heinrich, 1837—1920)的《无理数理论讲义》(1892)中。

2．戴德金的实数理论

无理数理论见于戴德金在1872年出版的《连续性与无理数》一书，该书首先研究直线的连续性，特别是区别开稠密性与连续性，然后把直线与实数对应起来，最后定义戴德金截断或分割。他的思想清楚地表达在下面的引文中："上面把有理数域比作直线，结果认识到前者充满了间隙，它是不完备的、

不连续的，而我们则把直线看成是没有间隙的、完备的和连续的。直线的连续性是什么意思？这个问题的答案必须包含研究所有连续区域时所根据的科学基础。只是泛泛而谈其最小子集的不间断的连续性，不会产生什么结果。我们必须要有连续性的一个精确定义，使它可以成为逻辑推理的基础。长时期以来，我对这些事情进行了深入思考，但始终没有取得成果，一直到最近我才发现我所要寻求的答案。不同的人对于我的发现将会有不同的判断，但我相信大多数人都会觉得它平凡无奇。在上一段中我曾经指出，直线上每一点 P 都将直线分成两部分，使得其中一部分的点都在另一部分的点的左方。我确信，连续性的实质就在于它的反面，也就是下面的原理：如果直线上所有的点都属于两类，使得第一类中每一点都在另一类中每一点的左方，那么就存在唯一的一个点，它产生了把直线分成两部分的分划。"

戴德金的无理数理论的核心是他的"截断"或"分割"概念。一个截断把所有有理数分成两类，使得第一类中每一个数都小于第二类中的每一个数，如果这个截断不"对应"于一个有理数，那么它就"定义"一个无理数。

假定我们已经指定某些规则，它把所有有理数分成两类(比如说"左"类和"右"类)，使得右类中的每一个数小于左类中每一个数，在这个假设之下，下面三种互相排斥的情形只有一种是可能的：

(A) 在右类中可以存在一个数大于该类中其他每一个数。

(B) 在左类中可以存在一个数小于该类中其他每一个数。

(C) 在 (A)，(B) 中所讲的数（(A) 中最大、(B) 中最小）都不存在。

可能导出无理数的是（C），因为，假如（C）成立，我们假设的规则就在所有有理数的集合中“定义”一个确定的中断或“截断”，仿佛左类和右类趋于交会在一起。但是为了使两类交会，这个“截断”必须用某个“数”填补起来，但是由（C），不可能由有理数填补，这样一来这个截断就定义了一个无理数。

有了实数的截断定义之后，自然地可以定义两个截断的加法及乘法，它们满足交换律和结合律。这样原来没有严格证明的公式

$$\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$$

也就迎刃而解了。

3．康托尔的实数理论

康托尔的出发点是引进有理数的基本序列。所谓基本序列是指一个有理数序列 a_1，a_2，…，a_k，…，对于给定的任何正有理数 $\varepsilon>0$，总存在一个正整数序数 N，使得当 m，$n>N$ 时，对任何 n 及 m 恒有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon。$$

如果两个基本序列 a_k，b_k，当 $k\to\infty$ 时，

$$|a_k-b_k|\to0,$$

则称为两基本序列等价。于是康托尔把实数定义为基本序列（a_1，a_2，…，a_k…）的等价类，记作 a，利用基本序列可以自然地定义实数的加法、减法、乘法、除法以及它们之间的关系：等于、大于、小于。这样定义的实数既包含有理数也包含无理数，而且实数构成的基本序列的极限也在实数当中，从而证明了实数系的完备性。

现在看来，康托尔的实数定义比较理想，它不仅定义比较

自然，而且方法上对结构数学有指导意义。这种完备化方法对于域论、赋值论、巴拿赫空间、希尔伯特空间等对象的产生及研究都是最为基本的。

这样，实数理论可以建立在有理数集合的基础上，而有理数自然归结为整数，这样对数学基础的研究就归结于集合论以及数理逻辑的研究了。

2.3 集合论

古典分析，也就是实变量的实函数的分析，经过一个世纪的努力，随着实数理论的建立，应该说已经有了稳固的基础。从历史上看，数学分析的发展先是有数量的演算，然后是函数的图象表示及演算，最后得到“算子”的算法，例如微分法及积分法。它们的发展也像希尔伯特所说的，从朴素阶段发展到形式阶段再发展到批判阶段，这最后的阶段也就是 19 世纪为数学分析建立基础的阶段。

数学分析基础的建立，与数学分析的发展顺序恰巧倒过来。先是柯西通过极限严密定义导数与不定积分以及收敛及发散，然后是狄利克雷与黎曼扩张函数的概念，最后是魏尔斯特拉斯建立分析的算术理论以及无理数理论，同时戴德金及康托尔也建立实数理论，然后戴德金及皮亚诺建立自然数理论，此时应该大功告成，但是还有两个遗留问题：一是定义实数时，要求有明确的有理数的无穷集合，二是对实数集合的结构有所了解，这些都导致集合论的产生与发展。

集合论是现代数学的基础。把它说成是数学中的一场革命也不为过。集合论的基本概念是集合，康托尔把集合定义为“所谓集合是把我们直观或思维中确定的、相互间有明确区别

的那些对象（它们称为集合的元素）作为一个整体来考虑的结果”。集合 A 的元素如为 a，b，c，…，则记作 $A=\{a, b, c, \cdots\}$，并说 a，b，c，…属于 A，记作 $a\in A$，$b\in A$，…。集合论研究的目标是对集合特别是无穷集合加以分类及刻画，由此得出无穷基数、无穷序数、连续统假设、选择公理等重要概念。由于集合论中悖论的产生，为消除悖论，产生出类型论及公理集合论等数学分支，成为数理逻辑与数学基础的重要内容。

长期以来，人们对有穷（有限）集合的概念并不陌生，并由此得出集合的许多性质的认识。例如，通过一一对应比较集合的大小，得出部分集合的观念，特别是“整体大于部分”这个欧几里得公理。而对于元素数目为无穷的集合，一般不予考虑。这是因为早在 1638 年伽利略就发现正整数的平方的集合 $\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$ 虽然是正整数集合 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 的一部分，但是通过一一对应却可以证明它们的数目一样多，这显然违背“整体大于部分”的公理。

但是随着数学的发展，数学证明中不可避免地要用到无穷集合，特别是在分析的基础——实数的研究中，所有定义实数的方法都要用无穷集合。最明显的是戴德金的定义中，就把实数定义为有理数的特殊集合（戴德金截割）。这样一来，对无穷集合的研究势在必行。而直接导致康托尔建立集合论的是他对三角级数的唯一性集的研究。

康托尔在研究集合论之前，首先研究三角级数理论，其中一个重要问题是唯一性集问题。所谓唯一性集是指实数集合 E，如果每个在 E 外均收敛于 0 的三角级数均恒等于 0。海涅首先证明有限集是唯一性集。康托尔在 1870 年证明任何可数闭集是唯一性集。杨（Young, William Henry, 1863—1942）

在 1909 年证明任意可数集是唯一性集。巴利（Bary，Nina Karlovna，1901—1961）在 1923 年证明任意可数个闭唯一性集的并集也是唯一性集。唯一性集问题至今仍没有完全解决，但的确向数学家明确地提出实数直线上究竟有多少种不同类型的点集的问题，而这促使康托尔思考点集的结构。

康托尔的集合论思想首先是在 1873 年末告诉戴德金的，1874 年发表第一篇论文，1883 年建立一般集合论（抽象集合论），1895 年到 1897 年发表关于无穷基数及无穷序数的论文。

在这一系列论文中，康托尔得出一系列惊人的结果。他用一一对应的方法证明，整数集合同有理数集合可一一对应，它们称为可数集合。但是他通过三种方法（其中之一是对角线方法）证明实数集合不能同有理数集合一一对应，因而是不可数的，这样他得出无穷集合可有不同的层次，并相应研究无穷基数及序数的概念。

集合论的诞生日可以说是 1873 年年底。1873 年 11 月，康托尔在和戴德金的通信中提出了一个问题，这个问题使他从以前的分析的研究转到一个新方向。他认为，有理数的集合是可以"数"的，也就是可以和自然数的集合成一对一的对应。但是，他不知道，对于实数集合这种一对一的对应是否能办到。他相信不能有一对一的对应，但是他"讲不出什么理由"。不久之后，1873 年 12 月 12 日，他承认他"没有认真地考虑这个问题，因为它似乎没有什么价值"，接着他又补充一句，"要是你认为它因此不值得再花费力气，那我就会完全赞同"。可是，康托尔又考虑起集合的映射问题来。很快他在 1873 年 12 月 7 日又写信给戴德金，说他已经成功地证明：实数的"集体"是不可数的。这一天可以看成是集合论的诞生日。戴

德金祝贺康托尔取得成功。其间，证明的意义也越来越清楚，因为康托尔还成功地证明实代数数的集合是可数的。康托尔的集合论的头一篇论文发表在1874年《克莱尔杂志》上，题目是“论所有实代数数集合的一个性质”。文章断言，所有实代数数的集合是可数的，所有实数的集合是不可数的，因此，非代数数的超越数是存在的，并且其总数要比我们熟知的实代数数多得多，也就是超越数的集合也是不可数的。

康托尔这第一篇集合论著作还证明了无穷之间也有差别，既存在可数的集合，也存在那种像实数集合那样的不可数的、具有“连续统的势”的集合。戴德金很赞同他关于集合与无穷的一整套想法，由此康托尔逐步完整地建立起集合论的整个体系。

1878年，康托尔发表了集合论的第二篇文章，其中把隐含在1874年文章中的“一一对应”概念提出来作为判断两个集合相同或不同的基础。这是最原始的等价观念，而两个集合相互之间能够一一对应就称为等势，势的概念于是应运而生。

在1878年的论文中，康托尔还证明一个令人惊讶不已的结果：在一维和二维的连续区域之间存在着一一对应。

从1879年到1884年康托尔发表了题为“论无穷的线性点集”的一系列文章，共有6篇。在这些文章中奠定了新集合论的基础。这些文章引进了导集和超穷数的记号，特别是在1883年的文章中引进生成新的超穷数概念，并且论证了所谓连续统假设，即可数基数后面紧接着就是实数基数。他相信这个假设正确，但没能证明。这个假设对20世纪的数学基础的发展起着极其重大的作用。同时他引进超穷数算术以及良序集，后来又引进一些拓扑概念如完备集等。

集合最重要的特征就是势或基数，这个概念在《一般集合论基础》中早就有了，在《对超穷集合论的贡献》中，康托尔给出一个带有玄学味道的定义：集合 M 的势或基数是由集合 M 借助我们思维的能动性产生的一个一般概念，是从集合 M 中抽去元素 M 的质的特征以及在 M 中的顺序特性而得出的一般概念。他用 $\overline{\overline{M}}$ 表示 M 的势，M 上的两横表示两重抽象，一重是抽出 M 的特性，一重是抽去 M 的顺序。

有了势的概念之后，他定义两个集合等价的概念：两个集合 M 和 N 等价，即 M 的元素和 N 的元素可以一一对应，用 $M \sim N$ 表示。不难看出：

(1) $M \sim M$；

(2) $M \sim N$，则 $N \sim M$；

(3) 如 $M \sim P$，$N \sim P$，则 $M \sim N$。

集合论的基本定理就是 $M \sim N$ 的充分且必要条件是 $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$，也就是假如集合 M 等价于集合 N，则 $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$。反过来，如 $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$，则集合 M 与集合 N 的元素可以一一对应。

在《对超穷集合论的贡献》发表之后，皮亚诺指出其中没有明确有穷数的概念。为了表明他的超穷数是通常有穷数或自然数的自然延续，他就必须使他的超穷数具有通常自然数的性质。自然数有两方面的性质：一是做加法、乘法以及乘方的运算，其结果也是自然数，二是自然数可以通过相继地加 1，归纳地造出来。康托尔必须用他的定义说明超穷基数也有自然数的相应性质，而且当基数是有穷时，它与通常的自然数性质也一样。这并不难，如集合 M 和集合 N 没有公共元素，那么基数 $\overline{\overline{M}}$ + 基数 $\overline{\overline{N}}$ 定义为 M 和 N 的并集 (M, N) 的基数 $\overline{\overline{(M, N)}}$，这里并集 (M, N) 都是包含 M 和 N 的全部元素

的集合。如（M，N）表示 M 中的元素 m 与 N 中的元素 n 的元素对（m，n）的集合，那么 $\overline{\overline{M}}\times\overline{\overline{N}}$ 就定义为（$\overline{\overline{M,N}}$）。康托尔还用覆盖的概念定义方幂，这样他可以定义超穷数了。第一个超穷数是自然数集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 的势，他把超穷数用希伯莱文第一个字母 $\aleph$ 来表示，读作“阿列夫”，自然数的集合的势作为超穷是最小的，记作 $\aleph_0$，以后的超穷数依次为 $\aleph_1$，$\aleph_2$，…。他证明 $\aleph_0 > n$，n 是任何一个自然数。超穷基数与有穷数不同，具有奇怪的性质：

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$，

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$，

$\aleph_0^n = \aleph_0$（n 是自然数）。

他还证明，每一个不是 $\aleph_0$ 的超穷数 a 都大于 $\aleph_0$，而且每一个势为 a 的集合，都可以造一个势比它大的集合，具体来说，该集合的所有子集合构成的集合的势就是 2^a，特别是他证明所有实数的集合的势 C 恰巧等于 $2^{\aleph_0}$，当然由此推出 $C > \aleph_0$，这正是他在集合论第一篇论文中证明的。这样，他以一目了然的代数方式得出划分有穷集合与无穷集合的界限：

每个有穷集合不等价于其任何一个部分（真子集）；

每个无穷集合均等价于其某一个部分（真子集）。

最后，他还要对有穷数le个交待，现在很简单了，从一个对象 e_0 开始，定义集合 $E_0 =$（e_0），于是产生基数 1，$1 = \overline{\overline{E_0}}$，在 E_0 中添加一个新元素 e_1，得出 $E_1 = \{e_0, e_1\}$，$\overline{\overline{E_1}} = 2$，如此下去，$E_v = \{e_0, e_1, \cdots, e_v\}$，$\overline{\overline{E_v}} = \overline{\overline{E_{v-1}}} + 1$。这样的生成原则对有穷基数与无穷基数同样适用，因此是一个统一的基数理论。

对于康托尔来说，集合论留给他两大问题：一是连续统假设，也就是是否在$\aleph_0$与C之间没有其它基数；另一个是良序定理，也就是任何集合都可以良序化，也就是每个全序子集都可以排列成序，它具有起始元素。这两个问题不仅对集合论影响巨大，而且后来对数学本身也有不可忽视的作用。

2.4 数理逻辑

1. 符号逻辑

数理逻辑的前身被称为符号逻辑。在 19 世纪末之前，大致有密切相关的四个方面的内容：

(1) 逻辑符号化，除了命题的符号化还有逻辑连结词的符号化，常见的连结词有：$\neg$（否定）、$\wedge$（合取）、$\vee$（析取）、$\Rightarrow$（蕴涵）、$\Leftrightarrow$（等价、当且仅当）等。

(2) 逻辑演算，主要是命题演算及谓词演算。

(3) 逻辑代数。

(4) 算术的逻辑基础。

数学的主要内容是计算和证明。在 17 世纪，算术因符号化促使代数学的产生，代数使计算变得精确和方便，也使计算方法系统化。费尔马和笛卡尔的解析几何把几何学代数化，大大扩展了几何的领域，而且使得少数天才的推理变成机械化的步骤。这反映了代数学作为普遍科学方法的效力，于是笛卡尔也尝试把逻辑代数化。他的一些手稿就是关于这方面的工作的。与笛卡尔同时代的英国哲学家霍布斯（Hobbes, Thomas, 1588—1679）也认为推理带有计算性质，不过他并没有系统地发展这种思想。

现在公认的数理逻辑创始人是莱布尼茨。他的目的是选出

一种“通用代数”，其中把一切推理都化归为计算。实际上这正是数理逻辑的总纲领。他希望建立一套普遍的符号语言，其中符号是表义的，这样就可以像数字一样进行演算，他的确将某些命题形式表达为符号形式，但他的工作只是一个开头，大部分没有发表，因此影响不大。

真正使逻辑代数化的是英国数学家布尔，他在1847年出版了《逻辑的数学分析》，给出了现代所谓的“布尔代数”的原型。布尔确信符号化会使逻辑变得严密。他的对象是事物的类，1表示全类，0表示空类，$x \cdot y$ 表示 x 和 y 的共同分子所组成的类，运算是逻辑乘法；$x+y$ 表示 x 和 y 两类所合成的类，运算是逻辑加法。所以逻辑命题可以表示如下：

凡 x 是 y　　　　$x \cdot (1-y)=0$,

没有 x 是 y　　　　$x \cdot y=0$。

它还可以表示

矛盾律　　　　$x \cdot (1-x)=0$,

排中律　　　　$x+(1-x)=1$。

布尔看出类的演算也可解释为命题的演算，当 x，y 不是类而是命题时，则 $x=1$ 表示命题 x 为真，$x=0$ 表示命题 x 为假，$1-x$ 表示 x 的否定等等。

美国哲学家、数学家小皮尔斯（Peirce, Charles Sanders, 1839—1914）推进了命题演算。他区别命题和命题函数。一个命题总是真的或假的，而一个命题函数包含着变元，随着变元值选取的不同，它可以是真也可以是假。小皮尔斯还引进了两个变元的命题函数以及量词和谓词的演算。

对现代数理逻辑贡献最大的是德国数学家弗雷格（Frege, Gottlob, 1848—1925），但在19世纪他的著作流传不广，他的

符号系统繁琐复杂，从而限制了它的普及。他在 1879 年出版的《概念文字》中，不仅完备地发展了命题演算，而且引进了量词概念以及实质蕴涵的概念。他还给出一个一阶谓词演算的公理系统，这可以说是历史上第一个符号逻辑的公理系统。因此在这本只有 88 页的小册子中，包含着现代数理逻辑一个颇为完备的基础。1884 年，他的《算术基础》出版，后来又扩展成《算术的基本规律》(卷Ⅰ，1893，卷Ⅱ，1903)。后来由于罗素的独立工作，才使得弗雷格的工作受到重视。

逻辑代数始于英国数学家布尔在 1847 年出版的《逻辑的数学分析》一书，其中正式推出所谓布尔代数，其后由英国数学家杰方斯（Jevons，William Stanley，1835—1882）和小皮尔斯在 1874 年加入次序关系，德国数学家施罗德（Schröder，Ernst，1841—1902）在他的《逻辑代数讲义》第一卷中加以公理化。但是谓词演算的逻辑代数一直到 1950 年才由波兰数学家塔斯基（Tarski，Alfred，1902—1983）所发展，他引进所谓“圆柱代数”。1955 年美国数学家哈尔莫斯（Halmos，Paul，1916—）又引进多进代数，形成一般的逻辑代数理论。

用符号语言对数学进行公理化的是意大利数学家皮亚诺，他在 1889 年用拉丁文写了一本小册子《用新方法陈述的算术原理》。在这之前，1888 年，皮亚诺已经把布尔和施罗德的逻辑用在数学研究上，并且引进了一系列对于他前人工作的更新。例如对逻辑运算和数学运算使用不同的符号，区别范畴命题和条件命题，这引导他得出量词理论。这些改进是对于布尔和施罗德理论的改进，而不是对弗雷格理论的改进，因为当时皮亚诺还不知道弗雷格的工作。在《算术原理》中，他在引进逻辑概念和公式之后，开始用符号的记法来重写算术。

皮亚诺引进的最原始的算术概念是“数”，“1”，“后继”和“等于”，并且陈述了关于这些概念的9条公理，其中公理2、3、4、5都是讨论恒等的，应该属于逻辑公理，剩下了5条公理，这就是现在众所周知的皮亚诺公理。最后一条即公理9，就是所谓数学归纳法原理，皮亚诺承认他的公理化来自戴德金。

皮亚诺的5条公理是：

(1) 1是一个数。

(2) 任何数的后继也是一个数。

(3) 没有两个数具有相同的后继。

(4) 1不是任何数的后继。

(5) 任何性质，如果1具有而且任何数的后继也具有的话，则所有数都具有此性质。

皮亚诺的工作为罗素所继续，他吸收皮亚诺的符号系统，独立于弗雷格从逻辑出发定义数，力图使数学建立在逻辑的基础上，并进而建立《数学原理》的庞大体系。另一方面，罗素对数理逻辑的贡献主要在于发现集合论悖论。

2. 罗素悖论与公理集合论

罗素的悖论是关于集合论的，康托尔已经意识到不加限制地谈论“集合的集合”会导致矛盾。其他人也发现集合论中存在矛盾。而罗素在1903年出版的《数学的原理》（*Principles of Mathematics*）中，则十分清楚地表现出集合论的矛盾，从而动摇了整个数学的基础。罗素的悖论是说：可以把集合分成两类，凡不以自身为元素的集合称为第一类集合，凡以自身作为元素的集合称为第二类集合，每个集合或为第一类集合或为第二类集合。设 M 表示第一类集合全体所成的集合。如果 M

是第一类集合，$M \notin M$，但由 M 的定义，$M \in M$，导致矛盾。如果 M 是第二类集合，则 $M \in M$，但由 M 的定义，第二类集合 $M \notin M$；同样也导致矛盾。发现了这个矛盾之后，导致第三次数学危机，在数学界出现了各种意见，从抛弃集合论到尽可能保持集合论在数学中的基础地位的都有。由于 20 世纪数学的发展主流是建立在集合论基础之上的，这里只考虑数学家如何消除悖论。在 20 世纪初，大致有两种办法，一种办法是罗素的分支类型论，它在 1908 年发表，在这个基础上罗素与怀特海写出三大卷《数学原理》（*Principia Mathematica*，1910—1913），成为数理逻辑最早的一部经典著作。还有一种办法是公理方法限制集合，由此产生公理集合论。

康托尔本人没有对集合论进行公理化，集合论公理化是德国数学家策梅罗（Zermelo，Ernst，1871—1953）在 1908 年发表的。策梅罗采取希尔伯特的公理化方法回避悖论，他把集合论变成一个完全抽象的公理化理论。在这样一个公理化理论中，集合这个概念一直不加定义，而它的性质就由公理反映出来。他不说什么是集合，而只讲从数学上怎样来处理它们，他引进 7 条公理：

（1）决定性公理（外延公理）：假如一个集合 M 的元素同时是一个集合 N 的元素，反过来，集合 N 的每个元素也是 M 的元素，则 $M = N$。简单来讲，每一个集合由它的元素所决定。

（2）初等集合公理（空集合公理、单元素集合公理、对集合公理）：

空集合公理：存在一个集合“空集”，完全不包括任何元素，用 $\emptyset$ 表示。

单元素集合公理：如果 a 是任何一个对象，那么就存在一个集合 $\{a\}$，它的元素包含 a 且只包含 a。

对集合公理：假如 a 和 b 是两个对象，且存在一个集合 $\{a, b\}$，它只包含 a 和 b 为它的元素，而不包含不同于 a 也不同于 b 的任何其他对象。

(3) 分离公理组：假如谓词 $E(x)$ 对于一个集合 M 的所有元素都有定义，则 M 有一个子集，M 包含且仅仅包含 M 中那些使 $E(x)$ 为真的元素。

(4) 幂集合公理：每一个集合 T 都对应另外一个集合 $P(T)$（T 的幂集），它的元素包含且仅仅包含 T 的所有子集合。

(5) 并集合公理：对于集合 S 和 T 都对应一个 S、T 的并集，即集合 $S\cup T$，它包含且仅仅包含作为 S 的元素和 T 的元素为元素。

(6) 选择公理。

(7) 无穷公理。

实际上策梅罗的公理系统 Z（公理 1 至 7）把集合限制得使之不要太大，从而回避了比如说所有“对象”，所有序数等等，从而消除罗素悖论产生的条件。

策梅罗不把集合只简单地看成一些集团或集体，它是满足 7 条公理的条件的对象，这样排除了某些不适当的“集合”，特别是产生悖论的原因是定义集合的所谓内涵公理组，如今已换成弱得多的分离公理组。

策梅罗的公理系统经过其他人特别是弗兰克尔（Fraenkel, Abraham Adolf, 1891—1965）的修正及补充，成为现代标准的策梅罗—弗兰克尔公理系统（简记为 ZF 系统）。不过，其中一般不包含有争议的选择公理（AC），如果加上则称为

ZFC 系统。

选择公理（*AC*）是 *ZF* 公理系统以外与数学关系最密切的公理。特别在本世纪 20 年代、30 年代发展起来的抽象代数学中更是必不可少的。由下面这个故事可以看出数学家对 *AC*（选择公理）的分岐。范·德·瓦尔登（Van der Waerden, Bartels, L. 1903—1996）在 1930—1931 年出版的《近世代数学》标志着抽象代数学正式建立。书中正式引入选择公理并用它得出许多代数结论。但这种观点受到逻辑学家的攻击。范·德·瓦尔登在 1937 年出版的第二版中完全取消选择公理及其推论，这又大大削弱了代数的内容而引起代数学家的抗议。范·德·瓦尔登真是左右为难。但他毕竟是一位代数学家，还是不愿意因逻辑的理由而砍掉大部分有意思的代数学。1950 年第三版时，他再次把选择公理请回来。为什么会这样呢？其实选择公理在策梅罗的公理系统中本是其中之一。但是，选择公理在 1904 年正式提出后，就遭到法国函数论专家波莱尔（Borel, Emile, 1871—1956）、拜尔（Baire, Rene, 1874—1932）、勒贝格等人的反对。他们反对的根据更多的是哲学上的，也就是从他们的构造主义观点出发，完整的选择是不可行的。

对于选择公理，这种分岐只是哲学上的，而不是数学上的。因为到 19 世纪末、20 世纪初，大部分数学家仍然倾向于构造主义的观点，也就是通过有限步，可构造地证明数学定理，对于不可构造的证明总是觉得不放心。当然也有少数数学家希望从这种束缚中解脱出来，他们认为逻辑上没有矛盾，即可以认为是存在的，这虽然把数学的领域一下子大大扩展出去，可是谁又能保证这个扩展有意义呢？这两大派观点势同水火，选择公理自然成为他们激烈斗争的场所，他们仍然各走各

的路。没有料到的是，赞成使用选择公理的一派，却发现一类新的“悖论”更不利于选择公理，因此，产生出前面所说的范·德·瓦尔登的困惑。

首先找到选择公理“悖论”的是豪斯道夫（Hausdorff, Felix, 1868—1942）。1914年，他为了解决勒贝格的测度问题，把勒贝格的条件减弱。勒贝格在1902年提出，是否存在集函数，也就是对于R^n中每个有界闭集A，能否对应一个非负实数$m(A)$满足：

a. 对R^n中单位立方体I^n，具有$m(I^n)=1$；

b. 全同集合测度相等；

c.（可数可加性）可数多互不相交集合的并集的测度等于每个集合测度的和。

满足这种条件的$m(A)$称为A的测度。为此，他引进勒贝格可测集满足上述条件。可是，他证明勒贝格测度的可数可加性时，使用了选择公理。同时，他也用选择公理证明了勒贝格不可测集合的存在。

于是豪斯道夫把勒贝格对测度的可数可加性的要求减弱为有限可加性，即如A，B为不相交集合，

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)。$$

结果，豪斯道夫证明，$n\geqslant 3$时测度仍不存在。为此，他用选择公理把一个球面分成4个集合A、B、C、D，使得A、B、C和$B\cup C$均全同，而D是可数集合。这后来称为豪斯道夫悖论。不过豪斯道夫并没有把它当成是反对选择公理的“悖论”。1923年，巴拿赫深入研究这个问题，他和塔斯基在R^n（$n\geqslant 3$）中造出两个具有非空内部的有界集合，都可以分解成为有限多块A_1，A_2，…，A_m和B_1，B_2，…，B_m，使得A_i

与B_i全同。从而不同半径的两个球面，也可如此分解。后来人们把下面的例子称为巴拿赫—塔斯基悖论或分球悖论，即可把一个球面经过有限剖分，可再拼成同半径的两个球面。这个结果明显与我们的经验及经典的数学相矛盾，追根溯源，毛病当然出在选择公理上。从而比较正统的数学家，自然对选择公理要大加鞭挞了。

可是选择公理的用途太大，不能忽视，许多学科的基本定理少不了它，如：

泛函分析中的哈恩（Hahn，Hans，1879—1934）—巴拿赫定理（关于巴拿赫空间上的线性泛函的可扩张性）。

拓扑学中的吉洪诺夫（Tikhonov，Andrei Nikolaevich，1905—）定理（关于任意多紧空间的直积为紧）。

而且这两个基本定理与选择公理等价，下面我们简述选择公理及其等价形式以及它们的推论。

选择公理

设$M=\{E_\alpha\}$（$\alpha\in\Lambda$）是一族两两不相交的非空集合，则必定存在一个集合$E\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha$，使每个$E\cap E_\alpha$（$\alpha\in\Lambda$）只包含一个元素。另一种说法是，对于不以空集$\varnothing$为元素的$X$的子集族$M$，存在$M$的选择函数。

所谓选择函数，是指单值函数

$$f: M\rightarrow X,$$

使得
$$A\mapsto f(A)\in A。$$

选择公理与和它等价的良序定理均比较难以直接应用。在数学中比较常用的形式是造恩（Zorn，Max，1906—1993）引理，这是造恩在1935年得到的。

造恩引理 设E为不空序集，如果E的每个全序子集在

E 中有上界，则 E 至少有一个极大元素。

它也有许多等价形式。

豪斯道夫极大原理 每个偏序集 M 中均包含全序子集合 A，它按照包含关系在 M 的所有全序子集中是极大的。

在 1935 年之前，造恩引理已在良序定理及超穷归纳法的形式下应用。第一个应用是所谓哈梅尔（Hamel, Georg, 1877—1954）基，他构造一个基，使实数域 R 成为有理数域 Q 上的向量空间。其后，随着抽象代数的发展，良序定理应用于群论、环论、格论、布尔代数理论、线性代数和域论。豪斯道夫用良序公理在 1932 年证明了向量空间基定理。

向量空间基定理 每个向量空间都具有基。

泰什谬勒（Teichmüller, Oswald, 1913—1943）接着于 1936年证明：每个希尔伯特空间均有标准正交基。阿廷（Artin, Emil, 1898—1962）和施莱尔（Schreier, Otto, 1901—1929）于 1927 年引入实域理论大都需用良序公理证明，其中特别是，每实域均为有序域。1929 年克鲁尔（Krull, Wolfgáng, 1899—1970）证明：

交换环的理想扩张定理 交换环中任何真理想均可扩张为极大素理想。

1936 年美国数学家斯通（Stone, Marshall, 1903— ）证明布尔环的两个重要定理，这里布尔环是指所有元素都是幂等的（即 $a = a^2$）的环。斯通证明：

布尔素理想定理 在布尔环中至少存在一个素理想。

以及等价的斯通表示定理：

斯通表示定理 任何布尔环均同构集合环。

这里集合的对称差作为加法，集合的交作为乘法。斯通还明确

指出，不能指望没有选择公理去证明这两个定理。

选择公理在群论中最重要的应用是：

自由群子群定理 自由群的任何子群也是自由群。

由于选择公理及其等价形式太重要，数学家大都倾向于接受它。在 ZF 公理系统中再加上选择公理，称 ZFC 公理系统，从中可以推出不少数学定理，它要比 ZF 系统单独推出的定理多不少。不过仍然有许多命题在 ZFC 系统中既不能证明，也不能否证。其中连续统假设就是最重要的一个。

3．希尔伯特纲领

为了使数学奠基在严格公理化的基础上，1922 年希尔伯特提出希尔伯特纲领，首先将数学形式化，构成形式系统，然后通过有限主义方法证明其无矛盾性。

1928 年希尔伯特提出四个问题作为实现其纲领的具体步骤：

（1）分析的无矛盾性。1924 年阿克曼（Ackermann，Wilhelm，1896—1962）和 1927 年冯·诺伊曼的工作使希尔伯特相信，只要一些纯算术的初等引理即可证明分析的无矛盾性。

1930 年夏天，哥德尔开始研究这个问题，他不理解希尔伯特为什么要直接证明分析的无矛盾性。哥德尔认为应该把困难分解：用有限主义的算术证明算术的无矛盾性，再用算术的无矛盾性证明分析的无矛盾性。哥德尔由此出发去证明算术的无矛盾性而得出不完全性定理。

（2）更高级数学的无矛盾性。特别是选择公理的无矛盾性。这个问题后来被哥德尔在 1938 年以相对的方式解决。

（3）算术及分析形式系统的完全性。这个问题在 1930 年秋天哥尼斯堡的会议上，哥德尔已经提出了一个否定的解决。

这个问题的否定成为数理逻辑发展的转折点。

(4) 一阶谓词逻辑的完全性。这个问题已被哥德尔在1930年完全解决。

这样一来哥德尔把希尔伯特的方向扭转，使数理逻辑走上全新的发展道路。

4. 哥德尔的三项重大贡献

除了连续统假设的无矛盾性之外，哥德尔在1929—1930年证明下面两大定理：

(1) 完全性定理。哥德尔的学位论文《逻辑函数演算公理的完全性》解决了一阶谓词演算的完全性问题。罗素与怀特海建立了逻辑演算的公理系统及推演规则之后，数学家最关心的就是公理系统的无矛盾性及完全性。所谓完全性，就是每一个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统导出，也就是证明。命题演算的完全性已由美国数学家波斯特（Post, Emil, 1897—1954）在1921年给出证明。而一阶谓词演算的完全性一直到1929年才由哥德尔给出证明。

(2) 不完全性定理。这是数理逻辑最重大的成就之一，是数理逻辑发展的一个里程碑和转折点。

哥德尔证明不完全性定理是从考虑数学分析的无矛盾性问题开始的。1930年秋在哥尼斯堡会议上，他宣布了第一不完全性定理：一个包括初等数论的形式系统，如果是无矛盾的，那就是不完全的。不久之后他又宣布：如果初等算术系统是无矛盾的，则无矛盾性在算术系统内不可证明。

哥德尔的不完全性定理造的是一个不自然的数论问题，数学家一直希望在一阶皮亚诺算术中找到一个数学表述既简单又有趣的数论问题，就像哥德巴赫猜想或费尔马大定理来说明算

术的不完全性。这一直到 1977 年才由巴黎斯（Paris, J.）等人造出，这更加证明希尔伯特纲领是不可能实现的。

5. 递归论与判定问题

递归论讨论的是从形式上刻划一个运算或一个进程的能行性这种直观的观念，也就是从原则上讲，它们能机械地进行而产生一个确定的结果。

能行的（*effectif*）这个概念含有可具体实现的、有效的、有实效的等等意思。法国数学家波莱尔首先在 1898 年他的函数论教科书中引进了这个词。他把数学的对象局限于能行的对象，这种主张实际上就是"法国经验主义"。因为函数论主要讨论集合、函数、积分等等。从这种观点产生出描述集合论、拜尔函数等概念。

递归论中所讨论的函数是比较简单的，它讨论有效可计算的函数，也就是递归函数。递归函数在历史上曾从不同角度提出来，后来证明它们都是等价的。

1931 年，丘奇（Church, Alonzo, 1903—）在普林斯顿开了一门逻辑课，克林（Kleene, Stephen Cole, 1909—1994）和罗塞尔（Rosser, John Barkley, 1907—）当时作为学生记了笔记。丘奇在讲课中引进他的系统，并且在其中定义自然数，这就很自然引起一个问题，在丘奇系统中如何发展一个自然数理论。于是克林开始进行研究，结果克林和丘奇得到一类可计算的函数，他们称之为 λ 可定义函数。

1934 年春天，哥德尔在普林斯顿做了一系列讲演（克林和罗塞尔记了笔记）。在讲演中，哥德尔引进了另外一套可以精确定义的可计算函数类，他称为一般递归函数。据他讲，他是受了厄布朗（Herbrand, Jacques, 1908—1931）的启发而得

到的。

这时自然出现了一个问题：一般递归函数类是否包括所有能行可计算的函数，它是否与克林与丘奇研究的 λ 可定义函数类重合。

1934 年春末，丘奇和哥德尔讨论一般递归函数问题。结果丘奇明确提出他的“论点”，所有直觉上可看成能行可计算的函数都是 λ 可定义函数，于是丘奇花了好几个月反复思考。当时克林表示怀疑，他认为这论点不太可能是对的，他想如果从 λ 可定义函数类用对角化方法可以得出另外一个能行可计算的函数，那么它就不是 λ 可定义的。但他又想到这事行不通。不久之后，丘奇和克林在 1936 年分别发表论文，证明 λ 可定义函数类正好就是一般递归函数类。有了这个有力的证据，丘奇于是公开发表他的“论点”。

也是在 1936 年，英国年轻的数学家图灵（Turing，Alan，1912—1954）发表了另外一篇重要文章，这标志着所谓图灵机的产生。在这篇文章中，图灵也定义了一类可计算函数，也就是用图灵机可以计算的函数。同时，他也提出他的一个论点：“能行可计算的函数”与“用图灵机可计算的函数”是一回事。1937 年图灵证明了用图灵机可计算的函数类与可定义函数类是一致的。当然，也就和一般递归函数类相重合。这样一来，丘奇的论点与图灵的论点就是一回事。当时许多人对于丘奇的论点表示怀疑，由于图灵的思想表述得如此清楚，从而消除了许多人的疑虑，哥德尔就是其中一位。从这时起大家对于丘奇—图灵论点一般都抱支持的态度。

与图灵同时，美国数学家波斯特也发表了一篇文章，类似于图灵的可计算函数。他的文章过于简短，一直到 1943 年波

斯特才发表了第四个表述，结果证明他的与别人的也都一样。

递归的概念并不难理解，它就是由前面的结果可以递推得到后面的结果。我们考虑自然数集合 N 到自然数集合 N 的函数，那么递归函数 $f(n)$ 可以定义为

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(n') = b(n, f(n)), \end{cases}$$

其中 $b(x, y)$ 是固定的二元函数，a 是固定的数，n' 表示 n 的后继，对自然数来讲，就是 $n+1$。这样知道 $f(0)$ 可得 $f(1)$，知道 $f(1)$ 可得 $f(2)$，依此类推 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…都可以一步一步具体算出来。经过类似的代换及递归的函数称为原始递归函数。

哥德尔等人引进的实际上是一般递归函数。一般递归函数都可以由原始递归函数通过极小化手续得出来。它的定义是

$$\varphi(n_1, \cdots, n_r) = \mu y(\tau(n_1, \cdots, n_r, y) = 0),$$

其中 $\tau(n_1, \cdots, n_r, y)$ 都是原始递归函数，μ 表示极小算子，对每组 $n_1, \cdots, n_r$，$\tau(n_1, \cdots, n_r, y) = 0$ 有解 y，μy 表示取解中最小解。

通过递归函数可以定义递归论中两个重要概念。

一个正整数集合称为递归可枚举的，如果存在一个递归函数 $f(x)$，它只有一个正整数变元，取值也是一个正整数值，使 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，…构成这个给定的集合。例如：

a. 1^2, 2^2, 3^2, …

b. 1, 2, 2^{1+2}, $2^{1+2+2^{1+2}}$, …

都是递归可枚举集合。显然 a 可以用 x^2 这个递归函数来枚举，b 要复杂一些。

另一个复杂一些的概念称为递归集合 S，它的定义是存在

一种能行的办法来判断任何正整数 n 是否属于 S。

正整数集合是递归的当且仅当它与它在 N 中的补集都是递归可枚举的。任何无穷递归可枚举集都包含一个无穷递归集。但是，存在正整数的递归可枚举集不是递归集。

苏联数学家马尔科夫(Markov, Andrei Andreevich, 1903—1979)在 1947 年发表《算法论》，首先明确提出算法的概念。但是它同以前定义的递归函数及可计算函数的计算过程都是等价的。这几个定义表面上很不相同，并有着十分不同的逻辑出发点，却被证明全都是等价的。这件事看来决非巧合，它表明，所有这些定义都是同一个概念，而且这个概念是自然的，基本的，有用的。这就是“算法”概念的精确的数学定义。

算法不可解问题，也就是不存在一个一致有效的机械化步骤能够解这个问题。在 20 世纪，严格证明一系列数学问题属于这类，最有名的是希尔伯特第 10 问题，它问是否能够找到一个算法来判定一个整系数不定方程（也称丢番图方程）是否有整数解。经过多年的努力，这问题最终在 1970 年否定解决。另外，对于结构数学至关重要的一系列问题，如群论中字的问题以及同构问题，拓扑学中的同胚问题等也都是不可解问题。也就是原则上讲，没有一个机械化的办法去解决这个问题。值得注意的是，这并不等于说这个数学问题就永远不能解决了。它只是证明我们不可能找到机械的办法或算法去一般地解决问题。但是还可以通过非机械的方法去解决。另外，如果降低一般性，在机械化方面还是可以有所作为的。例如，交换群的字的问题和同构问题都是算法可解的。

3 数学结构的基本概念

“结构”这个词，不仅在数学上，而且在物理学、化学、天文学、地学、生物学、技术科学乃至社会科学的众多领域中几乎处处存在。它反映了一个事物诸配件之间的关系，其局部与整体的关系，或几种事物之间的相互关系。数学结构的概念无非也是这种朴素观念的抽象，它经过了漫长的发展过程，最后由布尔巴基学派确定为整个数学的基础。

3.1 数学结构

一般集合论的发展给研究结构提供了活动的场所，只有集合才是结构的支持者；没有集合就无从谈其上的结构。集合是结构的“毛”所附的“皮”。给定一个集合，如果没有赋予它什么结构的话，它的每个元素都是互不相关、彼此独立的。而元素之间如果并不“平等”，彼此相关，就和一个“裸”的集合不一样了。如果元素之间有大小之分、远近之别、运算关系等等，它就有了“结构”，结构数学就是研究这些抽象数学结构的科学。

对于集合 M，又赋予结构 S，结构研究的任务是什么呢？

对于两种赋予结构的集合 (M_1, S_1) 和 (M_2, S_2)，什么时候可以把它们看成是一回事，也就是“等价”、“同构”

（表示结构相同）。

对于某一类型的结构加以分类（比如群），就要把同构的群看成完全一样不加区别，而把彼此不同构的群按照“等价”关系加以分类，每一等价类选出一个代表。

要解决这两个问题是极为困难的，现在完成这两方面研究的结构为数极少，如有限生成的交换群，复半单李代数等等。有些这类问题是属于不可判定问题，例如有限表出群的同构问题，只有再放宽条件或选择其中一部分对象才能解决。

为了完成上述两大任务，我们往往进行比较一般的研究。

1. 研究一个集合的子集合与商集合上的结构。

2. 两个集合 M_1，M_2 的积集合 $M_1\times M_2$ 上的结构。

3. 对包含 M 的集合 M'，是否可以把 M 上的结构扩张到 M' 上。

4. 找出反映结构特征的不变量。如果集合之间的映射仍然保持着某种结构，则在这种映射之下，不变量映到不变量，这种保持结构不变的映射常常称为态射，是十分重要的。

现代数学中的许多对象，如群、环、域、格、拓扑空间、流形等等远不能为以前的“数量关系和空间形式”所概括，它们作为普遍的抽象的结构成为数学中基本的研究对象。随着时间的过去，新的结构仍在不断地产生，产生的途径大致可分两类：一类是过去研究“具体”对象的抽象化，一类是从抽象结构衍生出来。上面我们列举的常用的数学结构都具有实际的背景，经过一定的步骤产生出来。这种步骤大致可以归纳为：

对象化→集合化→结构形式化（包括公理化）。

3.2 集合与映射

把考察的对象放在一起就构成集合。定义一个集合 M，也就是规定哪些元素属于 M，哪些元素不属于它。如 x 属于 M，也就是 x 是 M 中的元素，记作 $x \in M$，否则记作 $x \notin M$。

定义和表示集合的方法有两种：

——列举元素，如表为 $\{a, b, c\}$。

——描述性质，也就是把集合中的元素所共有的性质举出来。例如 $\{x | x \in Q$ (有理数集合), $x^2 < 1\}$，这表示我们定义的集合是满足平方小于 1 的所有有理数的集合。

一个集合 M 有许多子集合，也就是 M 的元素的一部分构成的集合。比如 $M = \{a, b, c\}$，它的子集合有 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$。有时为了方便把一个元素也没有的空集合 $\varnothing$ 也算作子集合。

集合之间有着包含关系 ($\subseteq$)，如

$$\{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}。$$

M 和 N 这两个集合的元素归并在一起所构成的集合称为 M、N 的并集，记作 $M \cup N$。两个集合 M、N 共有的元素的集合称为 M、N 的交集，记作 $M \cap N$。如果两个集合 M、N 没有共同元素，则 $M \cap N = \varnothing$。

如果 $M \subseteq N$，且 $N \subseteq M$，则 $M = N$。

集合 M 中的每个子集合 P 都有一个补集合 P'，P' 由 M 中不在 P 中的元素组成，因此，$P \cup P' = M$，$P \cap P' = \varnothing$。

两个集合可以相乘，构成积集合。如 M_1 与 M_2 的积集合是

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}。$$

注意积集合与并集完全不一样。

关于集合要注意下面几点：

(1) 集合的元素是确切定义的，不能含糊不清。比如，不能说有史以来最伟大的10个人物，因为这样讲问题并没有确定下来。如果你认为某10个人物最伟大，并列举出他们的名字，这才可以说他们的集合是确定的。

(2) 集合中的元素互不相同。严格来讲，$\{a, b, c, a\}$不能算是集合，它作为集合只是$\{a, b, c\}$。但是对于积集合$M \times M \times M \times M \times M$，元素$(a, b, a, c, b)$有意义，因为积集合的元素是一个五元组，不是一元组。同样地，(a, a, a, a, a)，(b, b, b, b, b)也是$M \times M \times M \times M \times M$的元素，这也反映出了积集合和并集合的不同。$M = \{a, b, c\}$与$N = \{b, c, d\}$的并集$M \cup N = \{a, b, c, d\}$，而$M \times N = \{(a, b), (a, c), (a, d), \cdots\}$，特别是$M \cup M \cup M \cup M \cup M = M = \{a, b, c\}$。

(3) 当只给定一个集合时，则不考虑结构，它的各个元素一律平等。所以$M = \{a, b, c\}$是表为$\{a, b, c\}$，还是$\{b, a, c\}$，$\{a, c, b\}$，$\{c, b, a\}$，这并没有区别。可是对于积集合$M \times M \times M$，(a, b, c)，(b, a, c)，(a, c, b)这些元素就互相有区别了。

(4) 每个集合的所有子集合构成该集合的幂集合。这个名称可以这样理解：如果一个集合有n个元素，那么它的所有子集合的数目共有2^n个，这里n和2^n称为各集合的基数。值得注意的是，一个集合虽然可以没有任何结构，它的幂集合却是具有布尔代数结构的。所以这两种集合不要混在一起。

各集合之间可以通过“映射”彼此发生关系。映射是函数

概念的推广，通常的函数 $y=x^2$ 表示实数集合 R 到实数集合 R 的一个对应，对于每个 x 值，都有唯一的 y 值与之相应。例如，x 取 0，1，2，3，4，5，…等值，y 就得 0，1，4，9，16，25，…等值，也就是把 1 映射到 1；2 映射到 4；3 映射到 9；……，好像照相一样，y 的值称为 x 值的象。这样的函数关系可以推广到任意集合上，这时称为映射。例如正整数集合 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 可以映射到正偶数集合 $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ 上，也可以映射到负整数集合 $\{-1, -2, -3, -4, \cdots\}$ 上。

设 F 是集合 X 到集合 Y 中的映射，对于 X 的任何子集 A，A 的元素在 F 下的象构成 Y 的一个子集，称为 A 在 F 下的象，记作 $F(A)$。反过来，Y 的任何一个元素 y 如果是 X 中某些元素 x 在 F 下的象，则称 x 为 y 的原象或逆象。同样 Y 的任何子集 B，如果其元素的原象集合是 A，则 A 称 B 在 F 下的原象，记作 $A=F^{-1}(B)$。

设 F 是集合 X 到集合 Y 中的映射，如果 Y 的每一个元素 y 都至少是 X 中一个元素的象，就称 F 是满映射（也称映上）。假如同一象点，原象唯一，就称 F 是单映射（也称映入）。如果 F 既是满映射，又是单映射，则称 F 是双映射（从集合来讲是一一对应）。例如，整数集合 Z 到整数集合 Z 的映射 F，可以有不同的情况：如 $F=F_1$，即把每个整数加倍，则每一象点只有唯一原象，所以 F_1 是单映射，显然 F_1 的象只是 Z 的一部分，所以不是满映射。但如 $F=F_2$，即把每个整数映成它的负数，那么正数映射成负数，负数映射成正数，零仍映射到零。不难看出，F_2 既是满映射，又是单映射，所以是双映射。

3.3 序结构

序关系是从实数集合 R 中任何两个实数都可以比较大小而来的。对于一般集合，这种关系未必存在。不过在实数集合中，对任意两个元素 x，y 均存在 $\leqslant$ 这样的序关系，或者 $x\leqslant y$，或者 $y\leqslant x$，而且 $\leqslant$ 关系满足公理：

*PO*1（反身性）对任何元素恒有 $x\leqslant x$。

*PO*2（传递性）由 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，可以推出 $x\leqslant z$。

*PO*3（反对称性）由 $x\leqslant y$，$y\leqslant x$，可以推出 $x=y$。

我们把满足公理 *PO*1，*PO*2，*PO*3 的二元素之间的关系称为偏序关系。

因此，对任何集合 X，如果在其一部分元素之间可以定义偏序关系，则称为偏序集合，也就是这个集合有了偏序结构。假如一个偏序集合还满足公理 *PO*4，即任何两个元素恒有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，则称为全序集合。

例 1　所有自然数有自然的大小顺序，显然满足公理 *PO*1，*PO*2，*PO*3，而且还满足公理 *PO*4，因此自然数集合 N 是全序集合。

例 2　自然数集合除了上述的序关系之外，还可以有别的偏序关系，比如说 $x\leqslant y$ 定义为 x 可整除 y，在这种定义之下 N 成为偏序集，但显然不是全序集。

例 3　任何集合的所有子集构成的子集族，按照包含关系构成偏序集合，也就是把 $\leqslant$ 看成是 $\subseteq$。因为两个子集可以互相不包含，所以这个偏序关系也不是全序关系。

对于偏序集合或全序集合，我们可以仿照实数集合那样定义出上界、下界、极大元、极小元等等概念。设 E 是偏序

(≤) 集合，A 为 E 的子集，对于每元素 $a\in A$，满足 $a\leq x$ 的任何元素 $x\in E$ 都称为 A 的上界。一个没有上界的元素称为 E 中的极大元素，反过来还可以定义下界与极小元素。

序结构中最重要的是格（*lattice*）。格是一种偏序集合，其任何两个元素 x，y 具有一个最大下界（或称"交"，记作 $x\cap y$）和一个最小上界（或称"并"，记作 $x\cup y$）。交和并的想法是从集合论中来的，因此它们满足一些类似的规律：

$L1$　幂等律　$a\cap a=a$，$a\cup a=a$。

$L2$　交换律　$a\cap b=b\cap a$，$a\cup b=b\cup a$。

$L3$　结合律　$a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$，

$a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$。

$L4$　吸收律　$a\cap(a\cup b)=a\cup(a\cap b)=a$。

满足 $L1$ 到 $L4$ 的结构称为格。假如一个格还满足：

$L5$　分配律　$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$，

$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$，

那么就称之为分配格。

分配格有一个重要的特例，就是著名的布尔代数。布尔代数还满足下列规律：

$L6$　存在最大上界 I 及最小下界 O，满足

$O\cap a=O$，$O\cup a=a$，

$I\cap a=a$，$I\cup a=I$。

$L7$　每个元素 a 存在一个补元素 a'，满足

$a\cap a'=O$，$a\cup a'=I$。

布尔代数乃至格的背景，都可以从集合论中看出来。如果"并"、"交"、"补"都按照集合论来解释，任何集合的所有子集合（加上空集合）就构成一个布尔代数。

布尔代数的名称来源于布尔研究逻辑命题的演算。如果把命题当作布尔代数的元素，∪解释为“与”，∩解释为“或”，a'解释为非a，那么命题的集合就形成一个布尔代数。任何命题的真假都可以通过其原始命题的真假及命题演算来决定。

另外，布尔代数还是电路中开关代数的一种抽象化，因此它也是具有实际背景的。这说明数学的抽象从本质上说还是反映客观世界的。

3.4 代数结构

代数结构反映整数集合或有理数集合中数与数的运算关系。各个数不是互不相关的，例如两个整数相加、相减、相乘仍然是一个整数，加法、乘法还满足一些算术规则。我们把这些二元运算（二个元素经运算+或×可得一个元素）及其规则推广到任意集合上，就能够得到种种代数结构。

群是最基本的代数结构，它具有一种二元运算的性质。

群的定义 一个具有二元运算（如乘法×）的集合称为群，如果它满足下面4条公理：

$G1$ （封闭律）集合中任何两个元素a，b相乘，其乘积$a\times b$也属于这个集合；

$G2$ （结合律）乘法结合律成立

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

$G3$ （存在单位元素）集合中存在一个单位元素1，它满足，对于集合中任何元素a，有

$$a\times 1=1\times a=a;$$

$G4$ （存在逆元素）对于集合中每一个元素a，都存在集合中一个元素a^{-1}，使得

$$a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1。$$

但不同的作者对于代数结构的公理有时稍有出入，他们有的只限于 $G2$，$G3$，$G4$，或其等价的形式。实际上他们默认下面几个条件：

1．对于任何 a，$b\in G$，存在二元运算 ab。

2．乘积 ab 是由 a，b 唯一确定的，即若 $a=a'$，$b=b'$，则 $ab=a'b'$。

3．对于任何 a，$b\in G$，$ab\in G$。

从推广的角度看，在许多情形下，它们可能不成立，或者减弱，例如

1′．对于部分 a，$b\in G$，可定义二元运算 ab。

因此，有时也可以把 1，2 两条称为公理 $G0$。不过通常都以上列 4 条为群的公理。

抽象代数学中最重要的环或域都是具有二元运算的结构，为了区别起见，一种叫加法（+），一种叫乘法（×）。

环的结构是从整数的集合推广而来的。整数集合有两种运算：加法和乘法。它对于加法构成群，单位元是 0，对于乘法不构成群，因为乘法的逆元素——分数不属于整数范围，因此不服从群论的第 4 条公理。但是可以证明乘法服从群的 $G1$、$G2$ 两条公理。因此，对于乘法形成一个半群。总括起来，我们就可以定义“环”了。

环的定义　一个具有两种二元运算（+，×）的集合 A 称为环，如果满足下列公理：

$A1$　（加法封闭性）若 a，$b\in A$，则 $a+b\in A$。

$A2$　（加法结合律）若 a，b，$c\in A$，则

$$(a+b)+c=a+(b+c)。$$

$A3$ （加法单位元（零元）存在）A 中存在零元 0，使得对于所有元素 $a\in A$，有 $a+0=a$。

$A4$ （加法逆元（负元）存在）对于每元素 a，存在 $-a\in A$，使 $a+(-a)=0$。

$A5$ （加法交换律）若 a，$b\in A$，则

$a+b=b+a$。

$A6$ （乘法封闭性）若 a，$b\in A$，则

$a\times b\in A$，$b\times a\in A$。

$A7$ （分配律）若 a，b，$c\in A$，则

$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$，

$(b+c)\times a=b\times a+c\times a$。

满足公理 $A1\sim A7$ 的代数结构，称为环。由于它一般不满足结合律，称为非结合环，以别于另外两类常见的环——结合环与交换环。

结合环除了满足公理 $A1\sim A7$ 之外，乘法还满足公理 $A8$：

$A8$ （乘法结合律）若 a，b，$c\in A$，则

$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$。

结合环还可以满足公理 $A9$：

$A9$ （乘法么元存在）存在 $1\in A$，使对所有元素 $a\in A$，

$1\times a=a\times 1=a$，

A 称有么元结合环。

如果有么元结合环中所有非零元素均有逆元素存在，即满足公理 $A10$：

$A10$ （乘法逆元存在）对任何非 0 的 $a\in A$，均存在 $a^{-1}\in A$，使

$$a^{-1}\times a=a\times a^{-1}=1。$$

如果环 A 的乘法二元运算满足A6，A8，A9，A10，则 $A-\{0\}$ 构成一个乘法群，此时结合环 A 称为除环（*division ring*）或斜域（*skew - field*），以前的名称为体（*Körper*）。许多几何如仿射几何和射影几何就是从定义在域上推广到除环上，而且进一步推广到更一般的环上。

当体中的乘法满足乘法交换律时，就得出最常见的二元代数结构——域。它是有理数域（Q）、实数域（R）及复数域（C）的代数抽象。由于域特殊重要，而且结构比较单纯而完整，即具有两个相容的交换群结构，通常与环分别加以研究。

域是我们熟悉的对象，而且它的两种运算均为可交换的。

对于结合环，如果乘法也满足公理 A11：

A11　（乘法交换律）若 a，$b\in A$，则

$$a\times b=b\times a,$$

则称为交换环。它的原型是所有正、负整数的集合，它的加法和乘法都是可交换的，使得我们感到非常熟悉。只是一般环，甚至交换结合环中也有许多特殊的现象，而这在通常整数环中是见不到的。

最典型的是存在零因子，对于通常整数环，如果 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$。但一般环中，可能 $a\neq0$，$b\neq0$，但 $ab=0$，这种 a，b 称为零因子，同样它可能存在幂零元，即 $a\neq0$，但 $a^n=0$，还有幂等元，即 $a\neq0$，但 $a=a^n$。另外，环中可能没有乘法幺元，例如，所有偶数构成的交换环。还有许多交换环，除了幺元之外，还有许多元素有逆元，但又不像域那样，所有非零元均有逆元，这些可逆元常被称为单位（*unit*），它们不止一个，切勿与幺元混淆。

对于一般结合环，除了上面所述的不同之处，明显的变化是乘法运算不满足交换律。此时，元素、集合及运算都有左右之分，它们的模式我们可以由四元数，特别是矩阵的乘法看出来。它们的结构较为复杂。

值得注意的是，对于一般环，乘法甚至是非结合的。但是，非结合环并不一定因为太怪而不重要，也不一定研究起来就更为复杂。主要的非结合环是李环和约当（Jordan，Pascuel，1902—1980）环。

李环的乘法通常表为［，］，它除了满足一般环公理之外，还满足如下两条公理：

$LA1$　对任何 $a\in L$，

$[a, a]=0$。

$LA2$　（*Jacobi* 恒等式）对任何 a，b，$c\in L$，

$[[a, b], c]+[[b, c], a]+[[c, a], b]=0$。

例如，三维欧氏空间 R^3 中所有向量，以向量加法为加法，以向量外积为乘法，就构成一个李环。

约当环 J 也是非结合环，但却是交换环，它满足：

$J1$　对 x，$y\in J$，$x\cdot y=y\cdot x$。

$J2$　对 x，$y\in J$，$(x^2y)x=x^2(yx)$。

约当环首先于1933年出现在物理学家约当的论文中，它不仅来自量子力学，而且对数学，特别是代数、群论、微分几何以及分析有重要应用。

由于环的来源大都来源于数，许多环具有域上的代数结构，往往代数成为环的结构最早研究的对象。

3.5 拓扑结构

第三大类型的结构是拓扑结构，它为我们提供了一种对空间的邻域、极限及连续性等直观概念的抽象的数学表述。拓扑反映出一个集合各个元素之间的亲疏远近的关系。单单定义一个集合，它的各个元素可以说一律平等，彼此互不相关。而拓扑结构则反映元素之间的亲密程度。

最直观的拓扑结构是欧几里得空间 E 中的距离，各个点相对于一点来说，并不是平等的，它们有远有近，也就是任何两点 x，y 之间有一个距离函数 $d(x, y)$，它满足下列 4 条公理：

$D1$　对于 E 中任何两点 x，y，$d(x, y)$ 是大于或等于 0 的实数。

$D2$　$d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$。

$D3$　对于 E 中任意两点 x，y，

$$d(x, y)=d(y, x)。$$

$D4$　（三角形不等式）对于 E 中任意三点 x，y，z，

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)。$$

这样，我们就可以把满足这些公理的距离函数推广到任意集合 E 上。假如 E 中可定义这样一个距离函数，并且满足公理 $D1$ ～ $D4$，我们就说 E 是一个度量空间。

若两个集合 E，E' 分别是以 d，d' 为距离函数的度量空间，f 为 E 到 E' 上的双映射，又 f 满足

$$d'(f(x), f(y))=d(x, y),$$

则 f 称为等度量映射。等度量映射不仅是集合到集合的一一对应，而且保持距离关系，也就是把距离近的点仍然映射到近

的点，距离远的点仍然映射到远的点，即能够保持距离这种结构的一种等价关系。对于距离空间，两空间如果存在一个等度量映射，就说它们度量等价或等距。也就是说，从度量空间来看是一回事，我们就不加区别了。

根据实数直线上"邻域"的性质，我们发现"邻域"都是一些满足下列公理的"开集"(开区间的集合)：

$O1$ 任何数目的开集的并集仍是开集。

$O2$ 有限多个开集的交集仍是开集。

这样一来，我们只需规定哪些子集是开集就行了。当然，这些开集要满足上述的公理 $O1$，$O2$，此外还满足下面两个平凡的公理：

$O3$ 整个集合是开集。

$O4$ 空集是开集。

对于一个集合，我们规定了一套开集，它们满足上述的公理 $O1 \sim O4$，我们就说集合上定义了一个拓扑，具有拓扑的集合称为拓扑空间。也就是该集合具有拓扑结构。

如果集合之间的一一映射保持拓扑结构不变，就称为拓扑等价，也叫做同胚。如果 f 是拓扑空间 E 到拓扑空间 E' 中的一个映射，如果 E' 中每个开集的原象也都是 E 中的开集，则 f 称为连续的。所以，同胚映射既是双映射，而且 f 及 f 的逆映射 f^{-1} 均为连续的。

3.6 复合结构

两种或多种结构可以复合而成更复杂的结构。每种结构都保持其独立性，但是它们之间通过映射、运算等关系联结在一起。复合结构最简单的例子是向量空间，它是以通常的三维欧

几里得空间为模型进行抽象推广的结果。

向量空间是由域和交换群复合的结果，所谓域 F 上的向量空间 V，是指满足下列公理的集合 V，对于所有 a，$b\in F$，v，$w\in V$，可定义 $av\in V$，并满足：

VS1　V 是交换群（群运算为 $+$）。

VS2　$(ab)v=a(bv)$。

VS3　$(a+b)v=av+bv$。

VS4　$a(v+w)=av+aw$。

VS5　$1v=v$，这里 1 是 F 的乘法单位元。

V 中的元素可以称为向量或矢量，F 的元素称为数量或纯量、标量。av 表示数量和向量的数量乘法。这种运算不是在同一个代数结构中进行，这是与其它代数结构或多重结构的不同之处。

有的纯代数结构也可以看成是复合结构。例如复数域 C 可以看成是实数域 R 上的向量空间。这时数量乘法就是通常复数的乘法，只不过数量是实数就是了。例如 $a\in R$，$b+ci\in C$，$a(b+ci)=ab+aci$。而向量空间 C 的加法仍然是原来复数的加法。

对于向量空间不难定义向量子空间。向量空间 V 的一个子集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 可以生成一个向量子空间。方法是做出 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 的线性组合，即所有元素

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$$

构成的集合，这里 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n\in F$。

假如 $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，我们就说向量 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 线性无关。例如空间中三个互相垂直的向量就线性无关。如果 v_1，v_2，$\cdots$，v_n

是 V 中一组线性无关的向量，而且它们生成的线性子空间正好是整个向量空间 V，就说 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 构成 V 的一组基。V 的任何两组基的元素个数都相同，这数目称为向量空间的维数。

向量空间 V 到自身的变换 α：$V \to V$，如果对于所有 $a, b \in F, v, w \in V$，满足 $\alpha(av + bw) = a\alpha(v) + b\alpha(w)$，就称为一个线性变换。如果线性变换是一一满映射，就称为非异的。非异线性变换是向量空间的一个自同构。V 的所有非异线性变换的全体构成一个群，称为一般线性变换群。

作为向量空间的推广，在现代同调代数中最常用的复合结构是模（*module*)。模是环和交换群的复合结构。设 R 为环，M 为（左）R 模，如果对于所有 $x, y \in M, a, b \in R$，满足：

$M1$　M 具有交换群的结构（群运算为 $+$）。

$M2$　存在 $R \times M \to M$ 上的映射，使得

(1) $a(x + y) = ax + ay$;

(2) $(a + b)x = ax + bx$;

(3) $a(bx) = (ab)x$。

这里“(左)”字表示环是在 M 的左方作用的。同样可以定义右 R 模。

如果环 R 具有单位元 1，且对于 M 中所有元素 x 有 $1x = x$，则称 M 为有单位元的模，它是模中最常见的一种。

3.7　多重结构

一个集合同时具有两种或两种以上的结构，这些结构之间有一定关系并且彼此相容，就称为一种多重结构。多重结构很

多，如偏序群、全序群、群环、拓扑群、拓扑环、拓扑域、偏序拓扑空间、拓扑向量空间等等。

例如，群 G 有加法运算（$+$）满足群的 4 条公理，它同时还满足全序关系（$\leqslant$），满足全序集合的 4 条公理，那么全序群当然就要满足上述 8 条公理。如果只是满足这 8 条公理，而群的结构和全序结构不发生关系，那么就不会出现什么有意思的结果。因此，还必须有两种结构之间的关系。一个自然的关系是在加法之下保持序关系不变，即对于 a，b，c，$d \in G$，有：

公理 如 $a \leqslant b$，$c \leqslant d$，则 $a + c \leqslant b + d$。

最简单的全序群是整数加法群和实数加法群。它们都满足：

阿基米德公理 对任何两元素 a，b，总存在一个整数 n，使 $b \leqslant na$。

反过来，我们能够证明：

定理 任何阿基米德全序群都同构于实数加法群的一个子群，因此是交换群。

这样一来，阿基米德全序群的结构就完全清楚了。注意，这里对多重结构的同构有很多要求，既要作为群同构，又要作为全序集合同构，而且同构不能够破坏联系它们的公理。

同样，拓扑向量空间 V，一方面具有向量空间的结构，满足 5 条公理，另一方面也满足拓扑空间的 4 条公理，而且还要满足拓扑结构与向量空间结构相关联的公理，即：

公理 V 中的代数运算（$+$）是连续的。

也就是说 $x + y$ 是一对变元 x，y 的连续函数，λx 是一对变元 λ，x 的连续函数。

3.8 混合结构

在数学结构理论发展之前，数学所研究的种种对象，其本身已经具有丰富的结构，有时很难将它们简单归结为三大类型的结构及其复合结构和多重结构。有许多结构的相互关系非常复杂，进行细微的分析往往很繁琐，有时也没有必要，它们可以通通归结为混合结构。

混合结构最重要的例子是微分流形。微分流形是现代数学中最主要的概念之一，它可以看成是光滑曲线和曲面概念的推广。黎曼在 1854 年已经引进过这个概念，后来，又由 H·外尔给出了一个内在的定义，他把流形看成局部由欧几里得空间互相连接而成。比如球面和环面都可以看作是由补钉相互重叠在一起而构成的，但是由于彼此的交叠方式不同，有的成为球面，有的成为环面，有的成为更复杂的曲面。所以定义流形也就是规定：（1）局部是几维欧几里得空间；（2）它们是如何连接的，也就是在相互重叠处，它们的坐标是如何变换的。如果这种变换是可微的，就称为微分流形；如果是解析的，就称为解析流形。

在微分流形和解析流形上还可以叠床架屋地制造出更复杂的混合结构，其中包括现在应用特别广泛的“纤维丛”、“绯索”等等。

微分流形上每一点上还附有一个流形，就成为纤维丛。最简单的是向量丛，即每一点有一个向量空间，好像一个球面上每点有个切平面，这些切平面放在一起成为丛。从整体上来讲，它又有一个 G 结构。最常用的是黎曼结构及概复结构。除此之外，还可以有所谓“联络”，联络是比较两个邻近点上

向量空间的差别的，这是现代微分几何学的重要研究对象。

如果微分流形上每一点上附有一个环，就成为“层”，这个概念在复解析几何学与代数几何学中是经常用到的。

微分流形是个比较理想的结构。除此之外，拓扑学还研究复形，它是由带棱带角的多角体搭配而成的。复形是组合拓扑学的研究对象。

3.9 衍生结构

数学上抽象结构的产生大致有两条途径：一条是从数学对象中自然抽取出来的，如群和度量空间等，它们大都是通过公理来定义的。由于它们具有实在的数学背景，它们有丰富的内容和广泛的应用。另一条是从已知的结构中，通过公理的加减抽象得出来的，它们往往没有什么具体的背景，而是人为地加以推广或加以限制，它们完全可以通过纯粹符号处理来研究，成为名副其实的抽象结构，形成一般代数学和一般拓扑学的分支。幸运的话，有时也会有用，也就是有助于比较具体的数学领域获得某些成果。在数学对象不断推广的情况下，往往也可能找到某种实际的背景而且得到有效的应用。由于它们是结构数学的组成部分，我们稍加解释一下。以群为例，现在公认群是元素间存在二元运算（例如乘法）的集合，它满足下列4条公理（$G1 \sim G4$）：

$G1$（封闭律）集合中任两个元素的乘积仍属于该集合。

$G2$（结合律）乘法满足结合律，即

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。

$G3$（么元律）集合中存在么元 I，对集合中任意元素 a 满足

$I \cdot a = a \cdot I = a$。

$G4$（逆元律）对集合中任一元素 a，存在唯一元素 a^{-1}，使得 $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$。

对于群，我们可以加入新的公理 $G5$：

$G5$（交换律）对于集合中任何两个元素 a，b，满足

$ab = ba$。

满足 $G1$ 到 $G5$ 的结构称为交换群或阿贝尔群。

对于一般的群，还有一些其它的定义方式，即两公理系统 $G1$，$G2$，$G3$，$G4$ 与 $G1$，$G2$，$G3-4$ 等价。例如，代替 $G3$ 和 $G4$，有等价的公理：

$G3-4$（左商律和右商律）对于集合中任何两个元素 a，b，存在集合中元素 x，y，使下面等式满足

$ax = b$，

$ya = b$。

另外还有一些其它定义的方式，例如：

$G6'$（左消去律和右消去律）对于集合中任何三个元素 a，b，c，由 $ab = ac$ 可推出

$b = c$。

或由 $ba = ca$ 可推出

$b = c$。

现在我们通过这些公理满足与否来自由组合可以得出许多新的衍生结构。先看由交换群的几条公理得出的各种可能性：

1. 二元运算封闭。
2. 二元运算不封闭。
3. 结合律部分满足左消去律或右消去律。
4. 结合律全部满足。

5．有左么元或右么元。

6．有双边么元。

7．有左逆元或右逆元。

8．有双边逆元。

9．交换律。

它们共有 $2^9=512$ 种排列组合，但其中许多情形有互不相容的情形，如 1 与 2，也有多余的情形，如 3 与 4，只余下 30 种左右情形，我们列举其中一些。

下面的集合，都是指存在二元运算的集合 S。

1．亚群（*groupoid*），S 只满足 $G1$。

2．半群（*semi-group*），S 满足 $G1$ 和 $G2$。

3．交换半群，S 满足 $G1$，$G2$ 和 $G5$。

4．有么元半群（*monoid*），S 满足 $G1$，$G2$，$G3$。

半群在所有衍生结构中是比较自然的对象，例如正整数集合按照加法构成半群，当然也是交换半群，它没有么元（零元素），也没有逆元（负元素），当然这种过于一般的结构难于研究，因此到 20 世纪 20 年代才由苏联数学家苏什凯维奇（Sushkevich Anton Kazimirovich，1889—）首先研究有限半群，其后克利福德（Clifford，Alfred H．1908—1992）研究由群的并组成的半群，他们的研究构成代数半群理论。20 世纪 30 年代美国数学家希尔（Hille，Einar，1894—1980）以及稍后日本数学家吉田耕作（Yosida，Kosaku，1909—1990）独立引入拓扑半群，在泛函分析中发挥重要作用。由于半群的元素组合比群更像语言，因此，半群的字的问题，比群论更为基本，它对自动机理论有着重要意义。正因为如此，从 20 世纪 50 年代起半群理论已成为独立的数学分支。

群还有另外的推广方式：

5. 拟群（*quasi-group*），S 满足 $G1$ 和 $G3-4$。

6. 圈（*loop*），即有幺元拟群，S 满足 $G1$ 和 $G3$，$G4$，显然结合圈是群。

换言之，拟群和圈与群的主要差别在于结合律不一定成立，或者满足较弱的结合条件。拟群在射影平面理论、非结合除环以及一系列组合问题中出现。它首先由德国女数学家穆芳（Moufang，Ruth，1905—1977）在 1935 年引入，她当时研究非德萨格平面，并且引进后来以她的姓命名的穆芳圈，有时也简称穆芳。穆芳圈是满足下列弱结合公理的圈，即满足下列任何一个恒等式

$$x\cdot(y\cdot xz)=(xy\cdot x)z,$$

$$(zx\cdot y)x=z(x\cdot yx),$$

$$xy\cdot zx=x(yz\cdot x)。$$

穆芳证明穆芳圈任何满足结合关系的元素

$$ab\cdot c=a\cdot bc$$

都生成一个结合子圈即群，由此推出圈中任何两元素都生成群。由此可见，穆芳圈是最接近群的结构。

公理的增减只是产生衍生结构最简单、最形式的方法。其它还有通过泛代数和通过范畴理论的较为复杂的方法。这种定义的结构如广群（*groupoid*）和伪群（*pseudo-group*）等等。广群最早是由德国数学家布兰特（Brandt，Heinrich，1886—1954）在 1926 年定义的。现在广群的用法和定义很多，最常见的是在范畴理论中。这里我们用一个等价的定义：

集合 G 上有一个一元运算

$$g\mapsto g^{-1}$$

和部分定义的二元运算

$$(g, h) \mapsto gh$$

满足下列条件：

(1) gg^{-1}和 $g^{-1}g$ 总有定义。

(2) gh 有定义当且仅当$g^{-1}g = hh^{-1}$。

(3) 若 gh 及hk 皆有定义，则 $(gh)k$ 和$g(hk)$ 也有定义并且相等。

(4) 若 $g^{-1}gh$，$hg^{-1}g$，$gg^{-1}h$，hgg^{-1}任何一个有定义，则等于 h。

广群在范畴论中很重要，在代数、拓扑、微分几何等领域有着重要作用。

伪群比较复杂，是一个流形上微分同胚的变换的集合，在合成和取逆变换上是封闭的。这也许是它带有“群”的味道，但是与较简单的群则没有什么共同之处。

类似于李群，还可以定义形式群，它在拓扑学（例如配边理论和同伦论）以及代数数论中均有用。

这些不太简单的推广反而比过于简单的抽象更有用处。这反映出来，数学中自然形成的对象总是有较为复杂多样的结构。

环 A 是一种复杂的结构，其上赋予两种运算，加法 $(+)$ 和乘法 $(\times)$，它有三套公理：

1. 对于加法，A 构成交换群，即对于所有元素，存在二元运算，有唯一的和，加法满足结合律，满足交换律，对于加法有零元(0)，每元素 a 有负元$(-a)$，满足 $a+(-a)=0$。

2. 对于乘法，A 构成亚群。

3. 联系加法和乘法的分配律

（右分配律）$a(b+c)=ab+ac$，

（左分配律）$(b+c)a=ba+ca$。

由于环的公理较多，其衍生结构也相当多，其中主要的是把加法交换群改为群乃至更一般的二元结构，这样得出：

1. 近环（*near ring*），如果对加法不一定交换，加法群是一般群，则得到近环，它要求右分配律成立。它对置换群、射影几何等有着重要作用。

2. 半环，如果对加法是结合半群，乘法也是结合半群，则称半环。

3. 新环（*neoring*），如果对加法是圈，乘法是结合半群，则称新环。

由于域上有许多结构，域的推广也不少，域对加法和乘法都构成交换群，它的推广也可看成环的推广。第一个明显的推广是乘法群不一定可交换，即除环，其次是拟域（*quasi-field*）。

拟域是具有两个二元运算"+"与"×"（简记为·）的集合 q，满足下列条件：

$q1$ q 对加法是群，具有零元 0。

$q2$ $q-\{0\}$ 对乘法是具有幺元 1 的圈。

$q3$ 对任一 $a\in q$，$a\cdot 0=0\cdot a=0$。

$q4$ 对任何 a，b，$c\in q$，

$$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)。$$

$q5$ （平面性条件）对任何 a，b，$c\in q$，$a\neq b$，存在唯一 $x\in q$，使得

$$-(x\cdot a)+(x\cdot b)=c。$$

一般拟域只满足 $q1\sim q4$ 即可，首先拟域由维布仑和魏德本在

1907年发现，其后称为维布仑—魏德本系统，1975年皮科特（Pickert）称为拟域。

半域是拟域的特殊情形，它满足左分配律

$$a(b+c)=ab+ac。$$

近域(*near field*)也称概体（*Fastkörper*），是一种拟域 N，其乘法满足结合律，也就是（$N-\{0\}$，·）也构成一个群。从某种意义上来讲，它也是域和除环的一种推广。若对集合 S，其上有加法+，对集合 $S-\{0\}$ 其上有乘法·，则对域来说，加法及乘法都构成交换群即阿贝尔群。对斜域（除环）来说，加法构成交换群，而对乘法不一定构成交换群。对于近域来说，对加法和乘法都是一般的群。这三种情形都在20世纪初受到注意。1905年狄克逊最早在研究射影平面时引进近域，他发现了正则近域以及7个有限非正则近域。1935年查森浩斯（Zassenhaus，Hans，1912—1991）证明有限近域的分类定理：每一有限近域或者是正则近域 N（q，d），或者是非正则近域 N（p）。实际上有限域是正则的当且仅当其乘法群是亚循环群（一个群 G 称为亚循环群，也存在循环群 N，使 G/N 也是循环群）。1987年格隆德荷费尔（Grundhöfer，Theo）刻画无穷的正则近域：无穷近域是正则近域，当且仅当其乘法群是可解群。

4　20世纪数学一瞥

20世纪行将结束，数学正如其它所有科学一样，面貌发生巨大的变化，但是由于数学具有与自然科学不同的对象和特点，它的变化自有其不同寻常之处：

1．数学的研究对象远远超出经典数学的范围，而且对于基础也同时进行深入探究，出现几乎是无限扩大的前沿，正如其它学科一样，日益显示出越来越复杂的多样性。

2．结构数学像一条红线，贯穿在20世纪数学发展的过程中，形成现代数学统一性特征的核心。

3．抽象化、概念化的数学非但没有各自为政，互不相关，反而使得大量意想不到的关系不断涌现，给各种问题的解决提供新的有力工具，特别是为解决经典问题打开了大门。

4．高度的抽象纯粹数学非但没有脱离实际，而且有着不可思议的应用。

虽说20世纪数学的主流是结构数学，但是它并不能覆盖所有数学，特别是涉及硬分析技术和计算方面的学科。大体说来，结构数学与经典数学的关系和它的影响可分成四类：

1．结构数学思想、方法和成果起着决定性的作用。结构数学对代数数论、代数几何学、李群、微分几何学、多复变函数论、抽象调和分析等学科的发展有着决定性影响。

2．结构数学的理论和方法对学科发展有一定的指导作用，如偏微分方程理论、大范围分析、动力系统理论、位势理论、二次型及高次型论、不变式论、丢番图方程等。

3．经典数学独立发展，基本上与结构数学无关，如解析数论、丢番图逼近与超越数论、凸体几何、数的几何、函数方程、渐进分析、逼近论、单复变函数论、算子论、矩阵论、数学物理方程求解、经典调和分析、经典几何、非线性分析等。

4．结构数学中具体的算法问题，往往与结构数学的发展相对独立，例如计算数论，但其结果往往对结构数学的发展有所启发。

4.1 结构的产生与结构数学的兴起

20 世纪数学的主流就是在集合论的基础上，由传统的数学对象与数学方法中产生一批抽象的结构，这些结构大都可以通过公理方法来定义，形成自己的问题和理论体系，并且衍生出一套相关的结构及理论。这些结构由于比较抽象，对于局外人来讲，往往不知所云。由于这些名词，如群、拓扑、流形之类的概念反复在数学乃至数学以外的文献中出现，我们有必要弄清其来龙去脉。显然，这是一个庞大的工程，这里不得不以最精简的方式表示出来，以使得读者有一个概括的认识，有些将在本书其它部分进行更详细的论述。

1．群

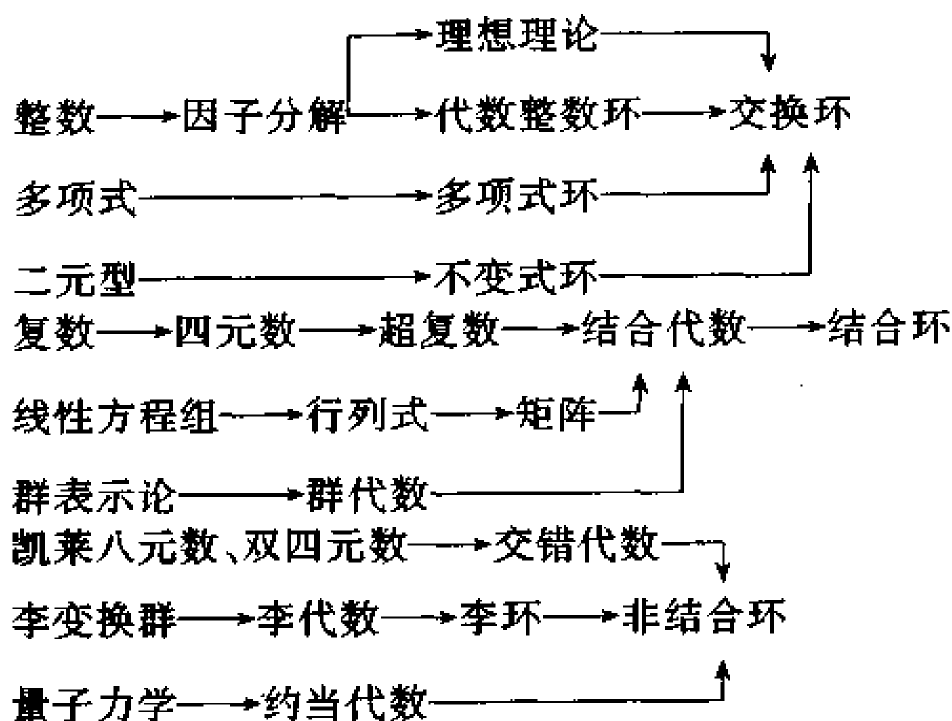
二元二次型──→型的合成──→交换群

代数方程──→根的置换──→置换群

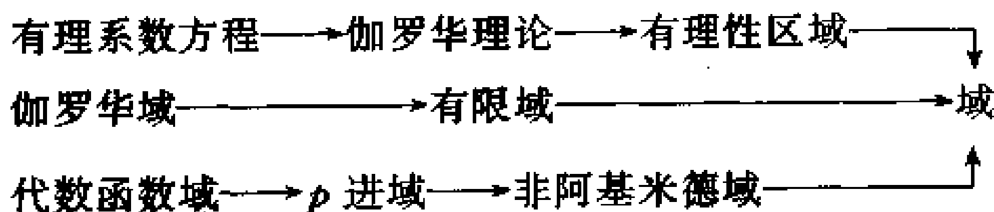
图形的全同──→全同运动──→运动群

射影性质──→射影变换──→变换群

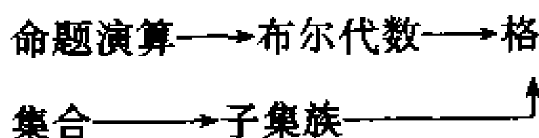
2．环



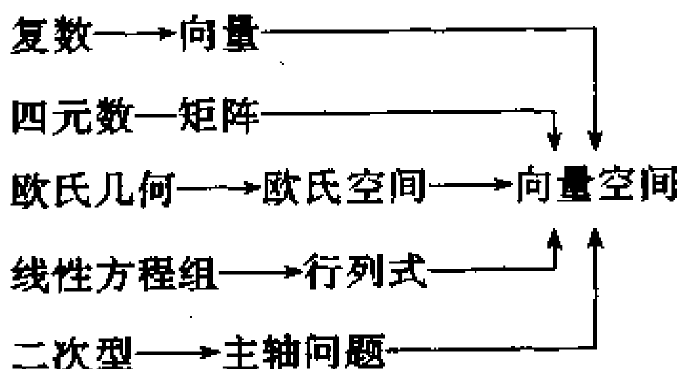
3．域



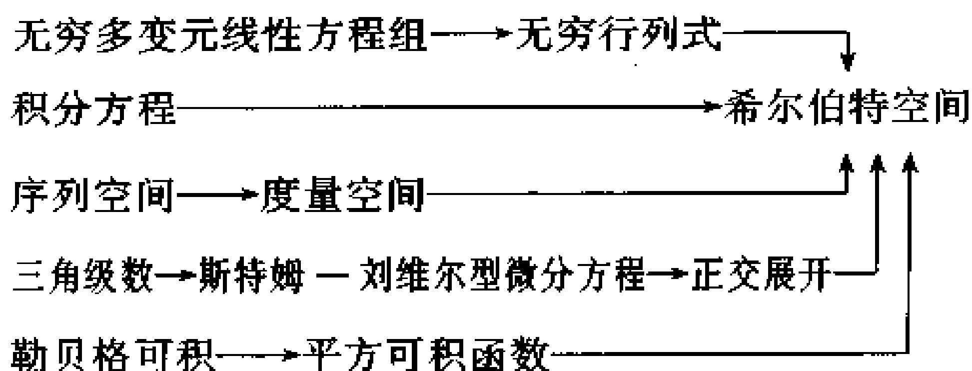
4．格



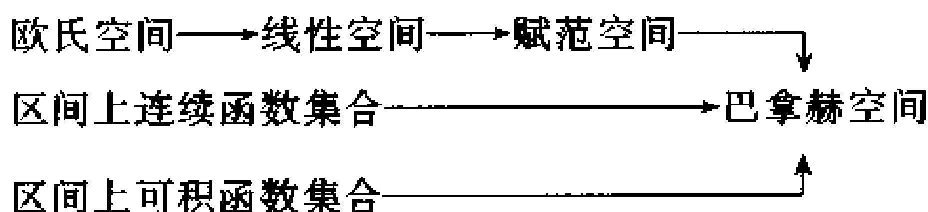
5．线性空间（向量空间）



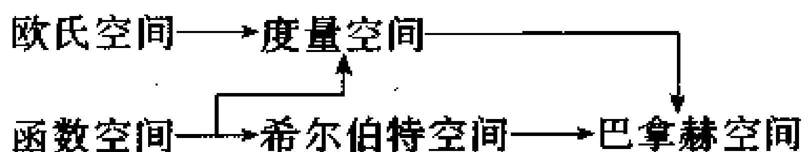
6. 希尔伯特空间



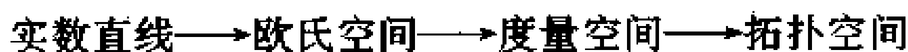
7. 巴拿赫空间



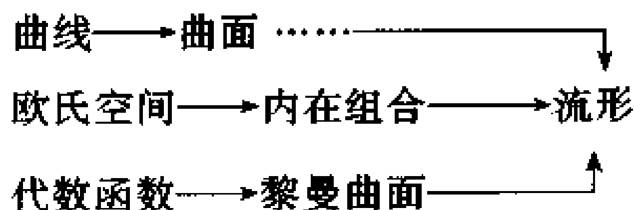
8. 度量空间



9. 拓扑空间



10. 流形



4.2 抽象代数学

代数学与拓扑学是现代数学的两大部门，它们构成现代数学的基础与核心。没有代数和拓扑，现代数学（除了那些较为孤立的、相对地讲不太重要的学科）可以说寸步难行。

抽象代数学或近世代数学是在20世纪初发展起来的。1930—1931年，范·德·瓦尔登的《近世代数学》一书问世，在数学界引起轰动，它标志着抽象代数学正式诞生。由此之后，抽象代数学或近世代数学成为代数学的主流，不久之后也就理所当然地把“抽象”及“近世”的帽子甩掉，堂而皇之成为代数学的正统。

抽象代数学讨论代数结构，其中最基本的是群、环、域。抽象代数学的对象与古典代数学完全不同，古典代数学主要是进行符号演算，其主要问题是解代数方程和代数方程组。

1. 群论

抽象群的观念来源于数论、代数和几何，其中主要来自方程论。拉格朗日及阿贝尔多多少少对群都有些模糊的观念。明确引进“群”的概念的是伽罗华，他主要证明了置换群的定理，从而推出一般五次以上代数方程不能用根式解。伽罗华的大部分著作一直到1846年被刘维尔发表之后才为人所知。

置换群理论最重要的进展来自法国数学家若尔当，1870年他的《置换及代数方程论》出版，开创了建立在置换群基础上的有限群论。同时他还进一步把群论的思想推进到几何学、函数论与微分方程论，并且进而得出抽象群的概念。

当时有限群的问题涉及列举给定阶数的所有群以及群的可解性的判据。主要的定理是由挪威数学家西洛（Sylow, Ludvig, 1832—1918）在19世纪70年代及德国数学家荷尔德在19世纪90年代得出的。而19世纪90年代群论最主要的成就是群表示论的出现，它是由德国数学家弗洛宾尼乌斯奠定的。后由他的学生舒尔（Schur, Isaac, 1875—1941）所发展，成为研究群论不可缺少的工具。所谓群表示即是把群具体实现为

某种结构的自同构群，例如域 F 上的有限维线性空间的线性变换群，通常是把群的元素与 F 上的 $n\times n$ 可逆矩阵相对应。在英国数学家伯恩塞德（Burnside, William, 1852—1927）的经典著作《有限阶群论》第二版（1911）已经进行综述并给出应用。

20 世纪有限群论最大的进展是 1981 年有限单群分类最终完成。分类与李代数有密切关系。

近百年来，李群与李代数理论也得到巨大发展。实际上，直到 19 世纪末，李在 1873 年创立的概念，仍然是不太清楚的。李定义的群是通过解析变换（至少也要可微变换）来定义的。实际上是一种解析变换群。因此，希尔伯特在他的著名的 23 个问题之中，第 5 问题是解析条件是否可以减弱为连续。

其后由于抽象代数学及拓扑学的发展，促使人们对李群概念进行分析。李群一身兼三任，既是解析流形，又是拓扑空间，还是群。兼备拓扑空间和群两方面的结合是拓扑群。

一般拓扑群的概念是施莱尔在 1927 年首先提出的，他给出一组一般的公理：一方面有群的公理，一方面是拓扑空间(一般是豪斯道夫空间)，群与拓扑的关系是群的运算在该拓扑之下是连续的。如果加上群的每元素局部与欧氏空间开集同胚，则称为局部欧氏群。但李群不一定紧，最接近李群的是局部紧拓扑群。1933 年匈牙利数学家哈尔（Haar, Alfred, 1885—1933）在局部紧拓扑群上给出不变测度，后称哈尔测度，由此冯·诺伊曼证明局部欧氏紧群是李群。但对一般局部紧欧氏群直到 1951 年才由三位美国数学家格里森（Gleason, Andrew, 1921—）、蒙哥马利（Montgomery, Deane, 1909—1992）和齐平（Zippin, Leo, 1905—）完全解决。当时关于

拓扑群及李群的一些结果总结在庞特里亚金（Pontrjagin，1908—1988）的《连续群》（1938）一书中。而对李群的现代刻划则见于薛华荔的《李群论》第一卷（1946）中。

2．域论

伽罗华不仅仅是群论的创始者，也是域论的创始人。伽罗华域是一种有限个元素构成的域，它的元素当然就不是通常的数了。他还完全决定了有限域的结构。1897 年亨塞尔引入 p 进数的概念，这些都为抽象域论打下基础。

从整体结构上对域进行考察始自戴德金及克罗内克对代数数域的研究（从 1855 年起）。但抽象域的观念则来自德国数学家韦伯（Weber，Heinrich，1842—1913），他的思想来自抽象群的概念。后来美国数学家狄克逊及韩廷顿给出域的独立的公理系统，在韦伯的影响下，德国数学家施坦尼茨（Steinitz，Ernst，1871—1928）在 1910 年发表《域的代数理论》一文，为抽象域论奠定了基础。

在 1900 年左右，亨塞尔在代数学和数论中引进一项新技术——p 进数，此后，它的重要性越来越大。亨塞尔通过和幂级数进行类比而造成这个工具。幂级数曾在黎曼和魏尔斯特拉斯关于单变量代数函数及其积分——阿贝尔积分的理论中起着如此重要的作用。这个理论是 19 世纪最突出的成就之一，其中幂级数的导数假定是在所有复数构成的域中变动。外尔通过一个典型的例子——二次范数来阐明 p 进数的思想。设 p 是一个素数，首先让我们约定对于有理数 a，b，模 p 的幂的同余式 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\, p^h)$ 有下面意义，即 $(a-b)/p^h$ 等于一个分数，其分母不能被 p 整除，例如，

$$\frac{39}{4}-\frac{12}{5}\equiv 0 \pmod{7^2},$$

因为

$$\frac{39}{4}-\frac{12}{5}=7^2\cdot\frac{3}{20}。$$

现在设 a，b 为有理数，$a\neq 0$，b 不是一个有理数的平方。在二次域 $Q(\sqrt{b})$ 中，数 a 称为一个范数，例如存在有理数 x，y，使得

$$a=(x+y\sqrt{b})(x-y\sqrt{b})$$

或

$$a=x^2-by^2。$$

这个方程的可解性的必要条件是对于每个素数 p 和 p 的每个幂 p^h，同余式 $a\equiv x^2-by^2 \pmod{p^h}$ 有一个解。这就是说这个方程有一个 p 进解的含意，并且必定存在有理数 x，y，使得 x^2-by^2 与 a 之差任意小。这就是说这个方程有一个 ∞ 进解的含义。只要 b 是正的，这后一条件显然对于任何 a 都满足；但是，如果 b 是负的，它只对正的 a 才满足。在前一种情形，任何 a 都是一个 ∞ 进范数，在后一种情形，只有一半的 a，即正的 a 才是 ∞ 进范数。对于 p 进范数也有类似的情况。可以证明，这些必要条件也是充分条件：如果 a 处处是一个局部范数，即对于每一个“有限素点 p”和“无限素点 ∞”，$a=x^2-py^2$ 都有一个 p 进解，则它就有一个“全局”解，即精确的有理数解 x，y。

这个简单的例子和二次型的种的理论有着密切联系。这个题目可以回溯到高斯的《算术研究》，但是到 20 世纪通过 p 进技术做出了决定性的进展。类域论也是一个典型的例子。1900 年左右，大卫·希尔伯特曾表述关于类域的一系列互相联

系的定理，并至少在一些特殊情形下证明了其中一些定理，而把其余的证明留给他 20 世纪的继承者，其中特别要提到高木、阿廷和薛华荔。希尔伯特的范数剩余记号为阿廷的一般互反律铺平道路。在这方面，希尔伯特也曾应用和复数域上的代数函数的黎曼—魏尔斯特拉斯理论的类比，但是，他所应用的精巧的、部分是超越的方法与简单得多的、对于函数证明是有效的方法并没有关系。通过 p 进技术，出现了方法上的接近，虽然，代数函数论和更精细的代数数论之间仍有相当大的差距。

亨塞尔及其后继者用非代数的、"拓扑的"概念——("赋值"或) 收敛来表示 p 进技术。无穷有理数列 a_1, a_2, …称为收敛的，如果当 i 和 j 彼此独立地趋于无穷时，差 $a_i - a_j$ 趋于零，$a_i - a_j \to 0$，更明显地说是，如果对于每个正有理数 ϵ，存在一个正整数 N，使得对于所有 i，$j > N$，$-\epsilon < a_i - a_j < \epsilon$。实数系的完备性被表述为柯西的收敛性定理：对任一有理数的收敛序列 a_1, a_2, …，存在一个实数 a，使得该序列收敛于 a，即当 $i \to \infty$ 时，$a_i - a \to 0$。伴随这个 ∞ 进收敛概念，我们现在面对着由素数 p 诱导出的 p 进收敛概念。这时，我们认为序列收敛，如果对于每个指数 $h = 1, 2, 3, \cdots$，存在一个正整数 N，使得当 i 和 $j > N$ 时，$a_i - a_j$ 被 p^h 整除。正如引入实数使得有理数在 ∞ 进意义下完备化一样，通过引入 p 进数，也可以使有理数系在 p 进意义下完备化。有理数被嵌入在所有实数的连续统中，同样也可以嵌入在每个 p 进数的连续统中。这些对应于有限或无限素点 p 的嵌入中的每一个，从算术观点来看都是同样有趣的。现在比以往更加明显地看到把代数数域与它到实数域的一个同态射影等同起来是多么错误；除了（实）无限素点之外，还必须注意那些对应于域的各

种素理想的有限素点，这里从早先的算术研究中得出的宝贵规则，使后来的算术研究非常富有成果，这是沟通近代数学中两个最迷人的分支——抽象代数学和拓扑学的一座桥梁。

3．环论

抽象代数学中最深刻的一部分是环论，环论大致可以分为三大块：交换环论、结合环论、非结合环论，其中结合“代数”（域及整数域上的环）理论在19世纪就已经发展起来。19世纪，复数在数学中起着举足轻重的作用，这给人留下深刻的印象。复数可以看成一对实数，它们可以加、减、乘、除，也能开方，自然就使大家去思考把它推广的问题。哈密尔顿（Hamlilton，William Rowan，1805—1865）在1843年发现了四元数，也能加、减、乘、除，只是乘法不服从交换律，也就是和一般的数大不一样。凯雷在1845年引进了八元数，可是乘法连结合律都不满足，也没有一定的除法了。这些是后来结合代数和非结合代数的前身。长期以来，对于结合代数（也称超复数）进行了深入的研究。

首先以实数域或复数域为基域的超复数到底有多少。1861年魏尔斯特拉斯证明，有限维的实数域或复数域上的可除代数（即对于 $a\neq0$ 及 b，方程 $ax=b$，$ya=b$ 均在代数中有解），如满足乘法交换律，则只有实数域及复数域（1884年发表）。1870年戴德金也得出同样结果（1888年发表）。1878年弗洛宾尼乌斯证明实数域上有限维可除结合代数只有实数域、复数域及实四元数代数。1881年小皮尔斯也独立得到证明。1958年用代数拓扑学方法证明，实数域上有限维可除代数，连非结合可除代数也算在内，也只有1，2，4，8这四种已知维数。可见实数及复数域具有独特的性质，而且只要有除法，即使结

合律和交换律都不满足，也只有四元数代数和八元数代数，可见类似于“数”的代数到此为止。

下面的问题是考虑更一般的结合代数。关于域上线性结合代数的研究在 19 世纪末处于枚举阶段，1870 年老皮尔斯（Peirce, Benjamin, 1809—1880）发表《线性结合代数》，列举六维以下的线性结合代数 162 个。他还引进幂零元与幂等元等重要概念，为后来的结构理论奠定基础。由此可见，进入结合代数之后，不仅乘法不满足交换律，而且有许多具有奇异性质的元素。它们在通常的数中是完全没有的。例如可以有元素 $a\neq0$，但 $a^n=0$。1898 年，E·嘉当在研究李代数结构的基础上，对于结合代数进行类似的研究。1900 年，俄国数学家摩林（Molien, Fedor, 1861—1941）引入重要的根基概念，证明复数域上维数≥2 的单结合代数都与复数域上适当阶数的矩阵代数同构。

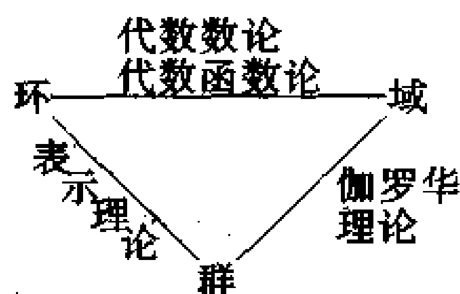
线性结合代数的结构定理是 1907 年由美国数学家魏德本（Wedderburn, Joseph Henry Maclagan, 1882—1948）得出的。线性结合代数可以分解为幂零代数及半单代数，而半单代数又可以表示为单代数的直和。单代数可表为域上可除代数的矩阵代数，这样结合代数就归结为可除代数的研究。可除代数有着以下的结果：1905 年魏德本证明有限除环都是（交换）域，也即伽罗华域。当时除了伽罗华域及四元数之外，不知道还有别的除环。

关于可除代数的研究，有许多算术上的困难，为此，E·诺特引进交叉积的概念。由此诺特等人证明“主定理”：代数数域上任何有限阶中心可除代数都是循环代数。所有交叉积都是中心可除代数。1931 年，阿尔伯特（Albert, Abraham

Adrian，1905—1972）问：反过来，有限维中心可除代数是否都是交叉积？这到1972年才由以色列数学家阿米祖尔（Amitsur Shimshon，1921—1994）举出反例。

抽象代数学中最基本的研究对象是群、环、域。从对象的纯粹程度讲，群是最为纯粹的代数对象，也是应用最广的对象。但是，它的抽象程度也是很高的。群的研究有多种复杂的来源，它与各种对称性有关系，但不像一般人所讲的那样单纯是代数方程论的产物。除了阿贝尔群之外，它与数论的关系不密切。环与域是较为复杂的代数结构，但它们更为实际，有极为明显的数的背景，而且它们的发展完全与数的推广密切相关。有了数与多项式的背景，理解环与域不太困难，但是群论完全是非常特殊的结构理论，几乎从已知的数学中找不到任何帮助。因此，它才是典型的代数结构。

群、环、域的理论关系如下图所示：



除了独立的群论、环论及域论之外，我们还有介乎其中两者之间的理论。介乎环论和域论之间的是代数数域（以及代数函数论），它完全是以整除环和有理数域的关系为基础，进而推广到代数整数环和代数数域，由此产生理想理论及交换环论。介乎域论及群论之间的是伽罗华理论，它充分反映代数方程理论如何产生置换群论，以及两者之间的关系。从四元数开始的超复数理论汇入结合代数理论，最后同群论相结合形成极

为重要的表示论。

4．代数数论

代数数是通常有理数的自然推广，代数整数是整数的自然推广。当把有理系数代数方程的根，例如$\sqrt{2}$、$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-5}$等加入有理数域 Q 中，经加、减、乘、除后形成的域称为代数数域。其中相当于整数的就是代数整数，例如添加$\sqrt{-5}$的代数数域 Q（$\sqrt{-5}$）中，代数整数可以表为 $a+b\sqrt{-5}$，其中 a，b 是通常整数。顾名思义，代数数论就是研究代数数域的数论性质。当然整数最基本的性质就是唯一因子分解定理，但代数整数就不一定了。例如在 Q（$\sqrt{-5}$）中，6 有两种分解素因子的方法：

$$6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{5})。$$

对于一个代数数域 k，有一个正整数 h（k），称为它的类数，它衡量该域中整数唯一因子分解定理成立或者不成立的"偏差"。当 h（k）$=1$ 时，则唯一因子分解定理成立，否则不成立。因此，代数数论头等重要的问题是计算类数。代数数论的奠基者们给出过所谓"类数公式"，但公式中有的因子很难算出。因此，代数数论中出现一系列尚未解决的问题。

（1）计算 h（k）。这个问题如此之难，以至于现在大都动用计算机。甚至类数的奇偶性，它的因子及同余性质都是许多论文及专著的研究对象。

（2）高斯问题。最简单的代数数域是二次域，有两类：添加实平方根，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$或$\sqrt{5}$，所成二次域称为实二次域；添加虚平方根，如$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-3}$或$\sqrt{-5}$，所成的二次域称为虚二次域。高斯猜想，添加的数绝对值趋于∞，类数也趋于∞，这已经于 1934 年获证。但是进一步问：h（k）$=1$ 的

二次域有多少？1967年证明类数为1的虚二次域只有9个，但类数为1的实二次域有限还是无限尚未解决。类数一定的虚二次域只有有限多个，现在只知道类数为2，3，4，5的那些虚二次域，其他的还不清楚。可见有限性定理成立，即使有计算机，定出有限个具体对象仍很难。这种问题在数学中俯拾即是！

到此为止，还只是代数数论的初级阶段，近百年我们又迈上五个台阶：

——理想理论与分圆域理论。

——类域论。

——局部理论与全局理论（包括函数域理论）。

——非阿贝尔类域论（上同调理论及K理论）。

——朗兰兹（Langlands，Robert，1936—）纲领。

每一步都有许多问题留给21世纪。

5．代数几何学

代数几何学研究的对象是由代数方程或代数方程组所定义的代数簇，它的特殊情形是代数曲线和代数曲面，从这个意义上来讲，它可以看成解析几何学的推广。中学学的解析几何学用代数方法研究直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等一、二次代数曲线以及一、二次代数曲面，但这是远远不够的。一类重要的三次曲线——椭圆曲线，就超出通常解析几何学的范围。代数几何学所研究的代数簇要比解析几何学广泛得多，它一般是定义在复数域中，其次往往还考虑射影空间。它的中心问题是分类问题，而这个问题的解决首先仰赖于用结构数学建立代数几何学的基础，在这方面主要是俄裔美国数学家查瑞斯基（Zariski，Oscar，1899—1986），法国数学家魏伊（Weil，An-

dre, 1906—）以及其后的塞尔（Serre, Jean - Pierre, 1926—）和格罗登迪克（Grothendieck, Alexandre, 1928—），特别是格罗登迪克的概形理论成为现代代数几何学的基本语言。在他们的工作的指引下，一般代数几何学取得一系列辉煌成就，特别是：

（1）1954年德国数学家希采布鲁赫（Hirzebruch, Friedrich, 1927—）把代数曲线的黎曼—洛赫定理推广到一般代数簇上。

（2）1964年日本数学家广中平祐（Hironaka, Heisuke, 1931—）关于一般代数簇的奇点解消的工作（主要是特征0域上）。

有了这些一般性理论，分类问题大有进展：

（1）代数曲线，代数曲线的分类在19世纪已由黎曼所奠定，即它依赖于亏格 g 和参模，20世纪对参模空间进行一系列研究，对于其结构已有相当的了解。

（2）代数曲面，本世纪初，意大利学派做出初步的贡献，从50年代起，它经历近代化和严密化特别是查瑞斯基的曲面的极小模型理论。50年代及60年代日本学派和苏联学派都给出了代数曲面分类的严格证明，但是参模问题还没有完全解决。

（3）代数3形，也就是三维代数簇。随着维数的增长，分类问题也越来越复杂。日本数学家森重文（Mori, Shigefumi, 1951—）于20世纪80年代末在极小模型与分类问题上取得重大突破。

4.3 一般拓扑学与泛函分析

泛函分析的原始背景早已在数学中存在。它们处理函数的集合或者函数族，讨论在它们上定义的函数——泛函的极值问题。从这个角度看，它们至少可以追溯到 17 世纪末的变分法的研究。

变分法问题溯源很古，古代就提出过狄多（Dido）问题，即求一定长的绳子所能围出的最大面积。17 世纪牛顿研究具有极小阻力的旋转物体的形状。其后雅各·伯努利（Bernoulli, Jacob, 1654—1705）和约翰·伯努利（Bernoulli, Johann, 1667—1748）提出最速降线问题，这个问题通常认为是最早的变分问题，这个问题中泛函的思想十分明显：每一条曲线对应一个降落时间 t，求最小的 t。实际上是求曲线集合上的函数——泛函何时达到极小。

泛函（*fonc tionnelle*）一词是阿达马引进的，其思想则首先是 1887 年由意大利数学家沃尔泰拉想到的“依靠于其它函数的函数”。他考虑独立的变函数的图象而不是函数本身。因此用的是线函数这个词表示曲线集合上的函数。

法国数学家阿达马认识到沃尔泰拉线函数的价值，他应用“泛函”来研究格林函数的变差。他还鼓励他的学生如弗瑞歇（Frechet, Rene Maurice, 1878—1973）、伽图（Gateaux, Rene, 1880—1914）、P·列维（Levy, Paul, 1886—1971）等人继续深入研究沃尔泰拉的新理论。P·列维 1922 年出版的《泛函分析》是以泛函分析为书名的最早著作。

泛函分析是研究无穷维抽象空间及其上分析的理论，它是 20 世纪数学的一项重大成就。无穷维空间可以看成通常欧氏

空间（直线、平面及三维欧氏空间）的推广，每点都可以表示一个向量，向量有长度，两者之间有距离等等。这个概念不难推广到高维欧氏空间，当维数无限增加，就是无穷维空间。它不仅有着实际问题的背景（例如在研究具有无穷多个自由度的力学系统的连续介质力学中，状态要用无穷维空间来表示），而且在现代物理学中起着不可缺少的作用。

在 1925—1926 年量子力学正式诞生时，有海森堡的矩阵力学和薛丁谔的波动力学。他们描述的状态一个属于 l^2 空间（平方可和序列空间），一个用 L^2 空间（平方可积函数空间），它们都是希尔伯特空间，而且彼此等价。而量子力学中可观测的物理量正好用希尔伯特空间的自伴算子表示，而且由自伴算子的谱理论已经知道分立谱及连续谱的存在。能量算子的本征值（谱）正好反映（比如说氢原子）光谱。这些数学工具在量子力学出现十几年前就已经由数学家得到并形成一套完整的理论——算子的谱理论，是泛函分析一个主要部分。量子力学发展成为量子场论时，泛函分析再一次提供了工具，这回是 20 世纪 30 年代由冯·诺伊曼发展起来的算子代数理论。

泛函分析是建筑在函数空间概念的基础上。古典分析研究实数集合或复数集合上的函数的性质，而泛函分析研究一般集合上的函数，特别是函数的集合，曲线的集合等等。而泛函实际上就是函数集合上的函数。泛函分析的发展有三个时期：

第一阶段是创始时期，大约从 19 世纪 80 年代到本世纪 20 年代。开始是意大利一些数学家引进泛函演算，特别是他们引进原始泛函以及线性算子的概念。后来法国数学家发展了泛函演算，特别是阿达马在 1897 年第一次国际数学家大会上，为了研究偏微分方程而考虑了闭区间［0，1］上全体连续函数

所构成的族。他发现这些函数构成一个无穷维的线性空间，并于 1903 年定义了这个空间上的函数，即泛函。这些还只是具体的结果。

法国数学家弗瑞歇利用当时的集合论观念把他的前人的结果统一成为一个抽象的理论，他把它们的共同点归纳起来而且加以推广：

（1）把函数或曲线看成一个集合或空间中的点。不妨把它们看成一个抽象集合。

（2）点列的极限概念也可以推广，这样有极限概念的集合他称为 L 空间，这是后来拓扑空间的萌芽。

（3）集合上可以定义取值在实数里的实函数，即泛函。由于有了极限概念，就可以定义泛函的连续性。

（4）泛函可以进行代数运算，也可以进行分析演算，例如微分。这样就成为名副其实的泛函分析了。

1906 年他还在抽象的空间中引进“距离”的观念，具有欧氏空间距离的性质，这种空间就有更丰富的性质。

大约与弗瑞歇同时，希尔伯特对于积分方程进行系统的研究。他在前人研究的基础上，深刻认识积分方程与无穷多变元线性方程组之间的相似性，积分方程的有解性与无穷多变元的收敛性条件有关。这样他实际上得到了具体的希尔伯特空间的理论。抽象的希尔伯特空间理论是他的学生施密特（Schmidt, Erhard, 1876—1959）得到的。他引进实和复的希尔伯特空间的几何观念，把函数看成是平方可和序列空间（l^2 的空间）的点。1907 年，黎斯（Riesz, Frigyes, 1880—1956）等人引进勒贝格平方可积空间（L^2 空间），发现其性质和 l^2 空间相同，两个月以后，费舍尔（Fischer, Ernst, 1875—1959）和

黎斯证明 l^2 空间和 L^2 空间同构，它们只不过是同一种抽象希尔伯特空间的两种具体表现而已。这也反映出研究抽象空间的重要意义。黎斯—费舍尔定理也更清楚地表明积分理论和抽象空间的泛函之间的紧密联系。拉东在 1913 年，弗瑞歇在 1915 年及丹尼尔在 1917 年都从泛函分析方法推广积分理论。

1910 年黎斯仿照 L^2 空间研究了 L^p 空间（$1<p<\infty$），也就是 p 次方可积函数全体构成的空间，后又研究 l^p 空间，它们不是希尔伯特空间，而是巴拿赫空间。他发现 L^p 上连续线性泛函全体构成一个“对偶的”空间 L^q，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。这些空间在研究偏微分方程方面是不可少的工具。

第二阶段泛函分析正式发展成为一门学科，从 20 世纪 20 年代到 40 年代。在两次世界大战之间，波兰数学家在泛函分析及拓扑学等方面取得了重要的成就，引起了全世界数学家的注目，其中最杰出的是巴拿赫。

巴拿赫进一步把希尔伯特空间推广成巴拿赫空间，并用公理加以刻画，形成了系统的理论。他在 1932 年出版的《线性算子论》一书统一了当时泛函分析的众多成果，成为泛函分析第一本经典著作。这时泛函分析不仅理论上比较完备，而且在古典分析的应用上起着举足轻重的作用。其中特别是波兰数学家肖德尔和法国数学家勒瑞的不动点理论是现代偏微分方程理论的重要工具。他们把微分方程的解看成巴拿赫空间到自身映射的不动点，得出了基本定理，这是现代非线性泛函分析的出发点。

1926 年冯·诺伊曼来到哥丁根大学，当时正是哥丁根大学物理学与数学的全盛时代。量子力学的产生和抽象代数、泛函分析的发展使人们的思想空前活跃。冯·诺伊曼把希尔伯特空

间公理化，并把量子力学的数学基础建立在泛函分析的基础上。他吸收抽象代数的思想把希尔伯特空间的有界线性算子组成代数，开辟了算子代数的新分支。他在20世纪30年代的几篇文章中对于所谓冯·诺伊曼代数的因子进行了相当完满的分类。其遗留一些问题一直到70年代才完全解决。

20世纪30年代末，波兰数学家马祖尔（Mazur，Stanislaw，1905—1981）与苏联数学家盖尔范德（Gelfand，Israel，1913—）发展巴拿赫代数理论，而且通过抽象方法轻而易举地证明了古典分析中的大定理。这显示了泛函分析方法的威力，也论证了泛函分析的独立存在的价值。

第三阶段是泛函分析的成熟阶段。从20世纪40年代起泛函分析在各方面取得突飞猛进的发展。施瓦兹（Schwartz，Laurent，1915—）系统地发展了广义函数论，它现在已成为数学中不可缺少的重要工具。它的前身就是狄拉克在量子力学中引进的δ函数。

另外一项重大发展是由物理学家维格纳（Wigner，Eugene，1902—1995）开始的群表示论的工作。群表示论在核结构及基本粒子理论中起着关键的作用。数学家及物理学家不仅进行具体计算，而且发展一套完整理论，这些理论在数学其它分支中也起着极大的作用。

第二次世界大战以后，泛函分析取得突飞猛进的发展：

1920年到1940年间所发展的局部凸向量空间理论的技术，在1945年后主要通过沙顿（Schatten，Robert，1911—）及格罗登迪克引入拓扑张量积的理论而完成。在这个理论的发展过程中，使得格罗登迪克引进一种新型的拓扑凸空间——核空间，它在许多方面比巴拿赫空间还接近于有限维空间，并且

具有许多卓越的性质，使它在泛函分析及概率论的许多分支中证明是非常有用的。

巴拿赫时代就提出来的两个老问题直到最近才被P·恩福楼（Enflo, Per）都给否定解决掉：他造出一个可分巴拿赫空间，其中不存在（巴拿赫意义下的）基；他还造出一个可分巴拿赫空间的紧算子的例子，它不是有限秩算子（关于紧集上的一致收敛拓扑）的极限。

1900年到1930年间由希尔伯特、卡勒曼（Carleman, Torsten, 1892—1949）及冯·诺伊曼所发展的希尔伯特空间的算子谱理论由于盖尔范德及其学派于1941年所创始的巴拿赫代数理论而大大简化及推广。但是，这个理论中最有趣的部分仍然是冯·诺伊曼代数的研究。冯·诺伊曼代数的研究开始得稍早一些，它和希尔伯特空间中局部紧群的酉表示理论有着非常紧密的联系。在冯·诺伊曼的先驱性文章之后，这些代数的分类并没有取得多少进展，特别是相当神秘的“Ⅲ”型因子，到1967年，不同构的Ⅲ型因子只知道3个。其后，事情却发展得很快，几年之内许多数学家发现了新的Ⅲ型因子，一直到1972年到达顶点，发展成一般的分类理论，这个分类理论是建立在富田的思想及康耐定义的新的不变量的基础上的，康耐的不变量使他解决了冯·诺伊曼代数理论中许多未解决的问题。

4.4 经典数学

20世纪数学的主流是结构数学，对它们的研究约占整个纯粹数学的$\frac{1}{4}$左右。另外有一半左右不同程度受到结构数学的影响，其中许多领域虽然来自经典数学，现在已完全受到结构

数学的洗礼，从某些极端的观点看，代数数论与代数几何学可以说是纯粹的结构数学。这些我们将在以后详细论述。余下的$\frac{1}{4}$是较为纯粹的经典数学，特别是和硬分析有关的数学，它们的方法基本上与结构数学无关。许多问题在20世纪取得了重大进步，我们列举其中一些：

1．解析数论

（1）黎曼猜想

（2）素数定理的初等证明

（3）华林问题与哥德巴赫猜想

（4）密率方法与筛法

（5）三角和方法

2．丢番图逼近与超越数论

（1）解决希尔伯特第7问题

（2）代数数的最佳逼迫

（3）高斯关于类数1的虚二次域猜想

（4）卡塔兰方程

（5）ζ（3）为无理数

3．单复变函数论

（1）奈望林纳（Nevanlinna，Rolf，1895—1980）理论

（2）拟共形映射

（3）比勃巴赫（Bieberbach，Ludwig，1886—1982）猜想

4．实变函数论

付立叶级数为几乎处处收敛或发散问题

5．微分方程与变分法

（1）极小曲面、普拉托（Plateau）问题

(2) KdV 方程

(3) 线性偏微分方程的解的存在性、唯一性。

即便如此，许多问题仍然同结构数学有着千丝万缕的联系。

1. 调和分析

付立叶级数理论的主要问题是函数 f 的付立叶级数的“和”是否存在，是否“等于” f。最初“和”与“等于”自然地理解为逐点收敛的，后来自然的和更富成果的是几乎处处收敛与依范数收敛。1876 年德国数学家杜·布瓦·瑞芒（du Bois Reymond, Paul, 1831—1889）举例表明存在连续函数的付立叶级数，它在某一点上，甚至在许多点上发散。如果考虑齐撤罗意义下的求和，则费耶尔（Fejer, Leopold, 1880—1959）定理（1904）指出：在这种意义下每一连续函数 f 的付立叶级数逐点收敛于 f。但可积函数的情况就差得多。1923 年柯尔莫哥洛夫证明：若只要求 $f\in L^1$ $(0, 2\pi)$（即 f 在 $[0, 2\pi]$ 上可积），则 f 的付立叶级数可以几乎处处发散或甚至于处处发散。但另一方面，鲁金猜想：如果 $f\in L^2$ $[0, 2\pi]$，则 f 的付立叶级数几乎处处收敛于 f。过了 50 年仍无法解决这问题，想证明猜想正确的努力遭到无数次失败，以致 20 世纪 50 年代到 60 年代专家们几乎一致认为，鲁金问题的答案必定是否定的。令人感到惊异的是，1966 年瑞典数学家卡尔松（Carleson, Lennart, 1928—）给出了第一个肯定的证明，他的成就的一个突出之处是他没有用到以前所不知道的技巧。次年，洪特（Hunt, Richard, A.）证明：对 $f\in L^p$ $[0, 2\pi]$，其中 $1<p<\infty$，则 f 的付立叶级数几乎处处收敛于 f。这样就漂亮而完整地结束了付立叶级数论中最重要的一章。

2．复变函数论

19世纪数学上最主要的成就之一是复变函数论的产生与发展。有人说："19世纪是函数论的世纪。"实际上，19世纪研究的主要是特殊函数，特别是椭圆函数及其推广，以及特殊的应用；尤其是用残数演算计算定积分和为绘制地图而进行的保角变换的研究。复变函数论的三个奠基人是柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯，他们各有一套方法和课题，各有自己的追随者，到19世纪末，出现了这三条途径的融合，形成了统一的复变函数论。另外，把一般函数论作为函数论的主要方向大大扩充了函数论的研究领域。

整函数及亚纯函数理论。比多项式复杂的函数是超越整函数，n次多项式有n个根，它可以表示为各因子的乘积。如果复变元z的复值函数在所有不等于∞的点Z处全纯，则称$f(z)$为整函数。当∞是$f(z)$的极点，$f(z)$就是多项式。而不是多项式的整函数，就是超越整函数，例如e^z，$\sin z$，$\cos z$等。魏尔斯特拉斯最先研究一般（超越）整函数，他在1876年把整函数表示成典范乘积。他还证明，所有复值都是$f(z)$，可以趋于任何复值C。1879年法国数学家毕卡证明了毕卡大定理：每一个超越整函数$f(z)$，对每一有限值W，最多除了一个之外，都取无穷多次。这个定理成为后来值分布理论的出发点。这个可能不取的值称为例外值，如果我们把∞也算一个值，则例外值可以有两个。儒利雅（Julia，Gaston，1893—1978）在1919年把毕卡定理加以精密化。他证明，对于超越整函数，至少存在一个方向，在这个方向的狭窄角域中，毕卡定理也成立，这个方向称为儒利雅方向。

比整函数再稍微复杂一些的函数是亚纯函数（半纯函数），

它在复平面上可以有极点。同样，魏尔斯特拉斯也给出了表示。1877 年瑞典数学家米塔格－莱夫勒（Mittag－Leffler, Gustav, 1846—1927）给出部分公式的表示：

对于亚纯函数，毕卡大定理也成立。

在经过许多人研究之后，芬兰数学家奈望林那对于亚纯函数的值分布理论进行了统一的论述。他引进了特征函数 $T(r)$ 及亏数等概念，证明了第一、第二定理，使值分布理论成为精致的定量理论。1935 年芬兰数学家阿尔福斯（Ahlfors, Lars, 1907—1996）用拓扑的方法建立了覆盖面理论，由它不仅可推出奈望林那理论，而且还得出亚纯函数许多其他结果，由它还明确了例外值个数 2 的拓扑意义，它与球面的欧拉示性数有关。其后的值分布理论是本着奈望林那理论的模式向一般区域或黎曼面上推广。

幂级数及狄利克雷级数是应用最多的复变函数，从 19 世纪末开始有着多方面的研究。特别是一个幂级数的收敛圆周成为自然边界的条件，有着各种各样的缺项定理。应用上最常用的是陶伯尔型定理。陶伯尔型定理是阿贝尔定理的逆定理。

阿贝尔定理 如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

的收敛半径为 1，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，其和为 A，则当 z 沿着某条道路趋于 1 时，$f(z)\longrightarrow A$。

奥地利数学家陶伯尔（Tauber, A. 1866—1943）给出逆定理成立的条件，即

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)。$$

1910年英国数学家李特尔伍德（Littlewood, John, Edensor, 1885—1977）把条件放宽到

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

而且这条件不能再放宽了。维纳把李特尔伍德的陶伯尔型定理推广到可测函数，进而证明素数定理。在数论上应用最多的是狄利克雷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}。$$

同样也有许多系数及奇点关系的研究，另外也有相应的陶伯尔型定理，在数论上有许多应用。

函数论一个重要方面是保角映射，其基本定理是黎曼映射定理（1851）。它指出单连通区域之间可通过解析函数进行保角映射。在区域 D 内定义的单值解析函数 $f(z)$，如 D 内不同两点映到不同点，称为单叶函数。单叶函数理论是保角映射的重要组成部分，在单位圆内单叶函数族的理论开始于科贝（Koebe, Paul, 1882—1945）对单值化问题的研究。他于1909年得出畸变定理。畸变定理反映函数值的某种限界。德国数学家比勃巴赫在1916年推导定量结果时，得出单叶函数系统理论，同时证明单叶函数 $|a_2|\leqslant 2$，他猜想 $|a_n|\leqslant n$。几十年来，数学家对此猜想发表了上千篇论文，研究了各种方法，特别是德国数学家娄伍纳（Löwner, Karl, 1893—1968）在1923年引进偏微分方程，首先证明 $|a_3|\leqslant 3$。美国数学家席弗尔（Schiffer, Menahem Max, 1911—）在1938年引进变分方法，后得出 $|a_4|\leqslant 4$（1956）。到1972年才证明 a_5，a_6 比勃巴赫猜想成立。出乎人们意料，美国数学家德·布兰吉斯（de Branges, Louis, 1932—）1984年一举完全证明比勃巴赫猜

想，从而结束了这个问题近 70 年的历史。

3. 微分几何学

1900 年里奇和他的学生列维－奇维塔系统地建立了张量分析的技术，并且提出求绝对微分不变式的一般问题，并提出这些坐标选取无关的最当然在物理问题与数学问题中有意义。20 世纪初，张量分析还只是少数数学家手中的工具，而一旦被爱因斯坦用在广义相对论上，不仅物理学家找到理想的数学工具，反过来激发人们对于黎曼几何及张量分析的兴趣，从而极大地推动微分几何学的发展。数学家决不满足于只给物理学家提供工具，他们要走自己的道路，而沿着这条道路走的结果到后来依然为物理学提供了工具。

1917 年，列维－奇维塔引进平行移动的概念，也就是黎曼流形上两个向量平行是什么意思。他定义向量场 $X(t)$ 沿曲线 Γ 平行移动为对曲线的协变微分等于 0。由此推出沿着测地线（也就是短程线），曲线切线是平行移动的。这样可得出曲率概念而不必通过 ds^2。

1918 年，外尔引进第一个联络的概念——仿射联络。它推广 Γ^i_{jk}变换关系式，但不依赖于 ds^2 的选取。通过联络可以引进曲率。其后 E·嘉当对联络的概念进一步发展。他是 20 世纪最伟大的数学家之一，19 世纪末到 20 世纪初，他主要从事李群的研究，对于分类半单纯李代数做出划时代的贡献。1910 年以后，他发展由达尔布等人发展的“活动标架法”，系统研究外微分形式法，这些方法成为他发展一般联络理论的工具。

嘉当的一般联络理论被爱瑞斯曼（Ehresmann，Charles，1905—1979）等人进一步发展成为一般的纤维丛观念。纤维丛是一种以一种空间为基，基上每点又长出另一空间为其纤维，

所有这些纤维合在一起成为纤维丛。利用纤维丛的观念可以自然定义一个流形上的向量场及张量场，同时也可以定义外微分形式及外微分。E·嘉当的联络概念使得我们能够比较在两个无穷近点的两个切空间的向量，同时可以定义一个向量场关于另一向量场的导数，这正好是协变导数的巨大推广。嘉当这一套概念和方法不仅对于微分几何产生长远的影响，而且对微分拓扑乃至物理学中的规范场理论都提供了重要工具。

20世纪微分几何学的另一重要发展方向是大范围微分几何学也即整体微分几何学。以前的微分几何学局限于每点邻近的坐标，只限于描述局部的性质，而对于整个曲面或流形的性质则所知甚少。从高斯开始，后来邦内（Bonnet，Ossian，1819—1892）证明的高斯—邦内公式是第一个这样的公式。这公式说对一个封闭曲面把高斯曲率进行积分（也就是都加起来），结果得出一个常数，它是欧拉示性数的倍数。也就是如果两个曲面同胚则不论大小、长短，积分起来都一样，它只与曲面的拓扑性质有关。1943年到1944年高维高斯—邦内公式的证明，把微分的整体性质纳入结构数学的框架之中。

4．解析数论

1912年，德国数学家朗道（Landau，Edmund，1877—1938）在英国剑桥召开的第五届国际数学家大会上十分悲观地说，即使要证明下面比较弱的命题，在当时也是十分困难的：存在一个正整数 K，使得每个 $\geqslant 2$ 的整数都是不超过 K 个素数之和。

不难看出，这个命题同希尔伯特不久前证明的华林问题在形式上十分相似，它们都是把任一整数表示成为有限多个某种特殊类型的整数之和的可能性问题。希尔伯特只解决了这种表

示的存在性问题，但并没有给出法数的估计。1918年英国数学家哈代（Hardy, Godfrey Harold, 1877—1947）与印度数学家拉曼努詹（Ramannjan, Srinivasa, 1887—1920）首先发表圆法，但一开始没有应用于哥德巴赫猜想及华林问题。

1920年挪威数学家布龙（Brun, Viggo, 1885—1978）改进了原始的筛法，得到了任何大偶数都可以表示为两个数之和，每个数的素因子数目不超过9个的结论（我们简记为9+9）。后来相继改进为（7+7）（1924），（6+6）（1932），（5+5）（1938）和（4+4）（1940），1947年挪威数学家塞尔伯格（Selberg, Atle, 1917—）大大改进了布龙筛法，并得出更好的定量结果（相当于2+3）。1941年苏联数学家林尼克发明大筛法，1948年匈牙利数学家瑞尼（Renyi, Alfred, 1921—1970）把大筛法加以精密化，首先得出（1+C）。1965年英国数学家罗斯（Roth, Klaus Friedrich, 1925—）及意大利数学家明比利（Bombieri, Enrico, 1940—）大大改进了大筛法，得出大筛法不等式，因此可以得出（1+3）。1966年陈景润改进前人的方法，宣布了（1+2），1973年发表了全部证明。在此之前，王元和潘承洞等也得到了当时最佳的结果。

1937年苏联数学家维诺格拉朵夫（Vinogradov, Ivan, 1891—1983）利用三角和方法，对于大奇数，完全解决奇数哥德巴赫猜想。这是解析数论的一项重大成就。

5　一些基本的数学结构

5.1　域

1．有理数域及其扩张

域的最基本的例子是有理数域 Q，实数域 R 和复数域 C。它们的元素是数，它们的加法和乘法运算就分别是通常的数的加法和数的乘法，这样，我们研究它就没有什么困难。

关于域 k 结构的主要问题，首先是刻画 k 的所有子域和 k 的所有扩张域的问题。从集合论来看，这是一种简单的包含关系。但是，从代数结构来看，不是所有的子集合和扩张集合都是子域和扩张域（简称扩域），它们必须满足：

（1）它们本身也是域，也就是满足域的所有公理。

（2）它们的加法、乘法零元、么元与原来的域分别保持一致。

显然 $Q \subset R \subset C$。这样，我们就自然以它们为模式来建立更一般的数域理论乃至抽象域的理论。从历史上讲，从有理数域到实数域是极难理解的，而从实数域到复数域相对容易理解，也就是复数域 C 只不过是实数域 R 添加一个虚数单位 i $(=\sqrt{-1})$ 就可以了。由此我们看出在原有的域 k 中添加不在 k 中的元素就可以实现域的扩张。不难看出，有理数域 Q 不包含任何子域，因此对于有无穷多个元素的域来讲，有理数

域都是它们的子域。换句话说，有理数域是素域，即所有包含无穷多个元素的域都是有理数域的扩域。

因此要研究域的结构时，我们就要研究它是怎么由 Q 扩张而成的。上面我们已经知道一个构造扩域的基本方法就是添加新元素。这样根据加上多少，加上什么样的元素可以对扩域进行分类。

如果域 k 的扩张 K 是通过加上一个元素 α 形成的，则称为单扩张。记做 $K=k\ (\alpha)$。这样，单扩张 K 的元素均可写为

$$\frac{a_0+a_1\alpha\cdots+a_n\alpha^n}{b_0+b_1\alpha+\cdots+b_m\alpha^m}$$

的形式，其中 a_i，$b_i\in k$，且 b_i 不全为 0。如果域 k 的扩张 K 是通过添加有限多个元素得到的，称为有限型扩张，它可以通过有限步单扩张而得到。

一个不在域 k 中的元素 α 称为代数元素，如果 α 满足系数取在 k 中的代数方程，即

$$a_0\alpha^n+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0,\ \ a_i\in k,$$

其中 a_i 不全为 0，否则称 α 为超越元素。例如，对有理数域 Q 来说，$\sqrt{2}$ 就是代数元素，因为 $\sqrt{2}$ 满足代数方程 $x^2-2=0$。π 不是代数元素，是超越元素。对于每个代数元素，存在唯一一个首项系数为 1 的不可约多项式

$$f_\alpha\ (x)\ =x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

使对任一满足 $f\ (\alpha)\ =0$ 的多项式 $f\ (x)$ 均有 $f_\alpha\ (x)$ 整除 $f\ (x)$，这个多项式 $f_\alpha\ (x)$ 称为 α 的极小多项式。一个域扩张 K/k 称为代数扩张，如果 K 中所有的元素均为代数元素。非代数扩张称为超越扩张。

扩张 K/k 称为有限扩张，如果 K 作为 k 上向量空间是有限维的，否则称为无限扩张。这个向量空间的维数称为扩张的次数，记作〔$K:k$〕。每个有限扩张均为代数扩张。单代数扩张的次数就等于其极小多项式的次数，而单超越扩张则是无限扩张。

对于相继两个扩张

$$k\subset K\subset L,$$

〔$L:K$〕是有限的当且仅当〔$K:k$〕与〔$L:k$〕均为有限，且有

$$[L:k]=[L:K][K:k]。$$

这样，我们可以知道复数域 C 是实数域 R 的有限代数扩张，而实数域 R 是有理数域 Q 的无限超越扩张，因此从 Q 到 R 有一个极为复杂的过程。而且，Q 与 R 和 Q 与 C 之间有无穷多个中间域，其中有许多是 Q 的有限代数扩张。Q 的有限代数扩域称为代数数域。例如，在有理数域中添加$\sqrt{2}$，就得到一个实二次域 Q（$\sqrt{2}$），如果添加$\sqrt{-1}$，就得到一个虚二次域 Q（$\sqrt{-1}$），这个域称为高斯数域。Q 添加 1 的 n 次单位根，也就是满足方程

$$x^n-1=0$$

的 ± 1 以外的根

$$\zeta_n=e^{2\pi i/n}。$$

这样得到的域称为分圆数域。对不同的 n，是否得出不同的分圆数域 Q（ζ_n）呢？答案是否定的。这样我们得出域的同构，也就是两个域看成相同的一个例子。所谓两域 K 和 L 同构，也就是存在一个一对一映射

$$f:K\longrightarrow L,$$

$$x+y \longmapsto f(x)+f(y),$$
$$xy \longmapsto f(xy),$$

且把 K 的零元和么元分别映到 L 的零元及么元上。可以证明，当 n 为奇数时，$Q(\zeta_n)$与 $Q(\zeta_{2n})$同构。例如 $Q(\zeta_3)$与 $Q(\zeta_6)$同构，也就是在有理数域 Q 中加入三次单位根 ω, ω^2 后与加入六次单位根后所得的域是一样的。

一般来讲，加入满足有理系数的代数方程的根后所得到的 Q 的扩域称为代数数域。代数数域构成代数数论的主要研究对象，我们将在以后的章节中论述。

现在我们回到如何由有理数域 Q 构成实数域 R 的问题。前面已经看到，它们是由添加许多新元素构成的，这个过程称为完备化（*Completion*）。是否 Q 只有唯一一种完备化呢？答案是否定的。事实上，对于每个素数 p，$p=2$，3，5，7，11，…都对应一个有理数域 Q 的完备化 Q_p，Q 经过这种完备化也成为一个域，称为 p 进域。它们同 R 一样，也是最基本的域，而且它们同 R 可以说是平起平坐的，总称局部域。它们同 R 与 C 另外一个相似之处在于我们可以仿照 R 与 C，进行数学分析的研究，正如实分析和复分析一样，建立 p 进分析。

2．p 进域

亨塞尔（Hensel，Kurt，1861—1941）在 1902 年的论文中直接道出他引入 p 进域的意图，“把代数数展开成幂级数”。他作为魏尔斯特拉斯的学生，深知幂级数方法的威力。魏尔斯特拉斯用幂级数展开单复变解析函数，不过魏尔斯特拉斯总要求在某个邻域幂级数收敛，因此它们并不能构成完备赋值域。亨塞尔和兰兹贝格（Landsberg Georg，1865—1912）把幂级数

展开的方法推广到代数函数或代数曲线上，他们的系统著作《单变元代数函数及其在代数曲线和阿贝尔积分上的应用》于1902年出版。通过类比代数数和代数函数，他用幂级数展开的方法来处理代数数，其结果就是 p 进域及其有限扩张，这就形成与库默尔原先的处理方法大异其趣的新方法。他的方法在他的两本著作《代数数论》(1908)和《数论》(1913)中给出详尽的论述。

复数系数多项式 $f(z)$ 在 $z=a$ 都有一个展开

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n。$$

这样不仅函数 $f(z)$ 在 a 点的函数值可明显表示出来，而且高阶导数的值也能显示出来。一般有理函数

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

有罗朗展开

$$f(z)=\sum_{v=-m}^{\infty}a_v(z-a)^v。$$

与这个表示进行类比，正整数很容易有 p 进展开

$$f=a_0+a_1p+\cdots+a_np^n,$$

其中系数属于 $\{0, 1, \cdots, p-1\}$，这种表示是唯一的。对于分数，有类似的

$$f=\sum_{v=-m}^{\infty}a_vp^v。$$

这样，我们就有 p 进数的定义：

定义 p 是一个固定素数，p 进数就是形式的无穷级数

$$a_{-m}p^{-m}+\cdots+a_{-1}p^{-1}+a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots,$$

其中所有 $a_i\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$。

p 进整数是没有负幂项的 p 进数，即可以表为

$$a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots$$

的 p 进数。所有 p 进数的完备化集合记作 Q_p，而其中的 p 进整数集合记作 Z_p。

正如10进位表示一样，在表示数的时候，我们只需把前面的系数写下，而不再写 p^n。也就是把

$$\cdots+a_{-m}p^{-m}+\cdots+a_{-1}p^{-1}+a_0+a_1p^1+\cdots,$$

写作

$$(\cdots,\ a_{-m},\ \cdots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ \cdots),$$

p 进数是有理数，当且仅当从某一项起这个表示是周期的。

另外，对于负数和有理数，我们都有唯一的这种表示，特别是由于系数都是整数，我们只需找到 $a \bmod p^n$ 的剩余类即可。例如，不难验证

$$-1=(p-1)+(p-1)p+(p-1)p^2+\cdots,$$

$$\therefore -1=(p-1)+(p-1)p+\cdots+(p-1)p^{n-1}-p^n。$$

因此 $$-1\equiv(p-1)+(p-1)p+\cdots+(p-1)p^{n-1}\pmod{p^n}。$$

同时 $$\frac{1}{p-1}=1+p+p^2+\cdots,$$

$$1=(1+p+\cdots+p^{n-1})(1-p)+p^n。$$

因此 $$\frac{1}{1-p}\equiv1+p+\cdots+p^{n-1}\pmod{p^n}。$$

p 进数可以自然地加、减、乘、除，形成一个域。问题是如何由有理数域 Q 完备化成为 Q_p。但是，p 进数级数与10进小数不同，它一般不收敛，而10进小数总可以取越来越小的绝对值。因此，就必须用一个新绝对值 $|\ |_p$ 来取代原来的绝对值，使 p 进级数收敛。这个绝对值也称 p 进赋值，是以后赋值论的模式。

定义 对于非零整数 b，$c\in Z$，$a=\frac{b}{c}\in Q$，设

$$a=p^m\frac{b'}{c'},\ (b'c',\ p)=1,$$

则定义

$$|a|_p=\frac{1}{p^m}。$$

记

$$m=V_p(a),$$

并规定

$$V_p(0)=\infty。$$

这样我们得到函数

$$V_p:\ Q\longrightarrow Z\cup\{\infty\},$$

具有下面三条性质：

$V1$ $V_p(a)=\infty$ 当且仅当 $a=0$。

$V2$ $V_p(ab)=V_p(a)\ V_p(b)$。

$V3$ $V_p(a+b)\geqslant\min\{V_p(a),\ V_p(b)\}$。

这个函数 V_p 称为 Q 的 p 进赋值。

由 p 进赋值可以定义 Q 上的范数，也就是 p 进绝对值 $|\ |_p$：

$$|\ |_p:\ Q\longrightarrow R,$$

$$a\longmapsto|a|_p=p^{-V_p(a)},$$

它满足范数的三个条件：

$N1$ $|a|_p=0$，当且仅当 $a=0$。

$N2$ $|ab|_p=|a|_p|b|_p$。

$N3$ $|a+b|_p\leqslant\max\{|a|_p,\ |b|_p\}\leqslant|a|_p+|b|_p$。

这样，我们可以完全仿照从有理数域 Q 出发构造实数 R 的方

法来构造p进域。有了范数之后，不难定义柯西序列，只是现在的柯西序列$\{x_n\}$是相对于p进绝对值定义的，也就是一有理数列$\{x_n\}$称为柯西序列，如果对于每个$\varepsilon>0$存在自然数n_0，使得对所有n，$m>n_0$，

$$|x_n-x_m|_p<\varepsilon。$$

Q中的一个序列称为0序列，如果$|x_n|_p$在通常意义下是收敛于0的序列。通过添加Q_p的元素，令所有Q中的柯西序列都依范数$|\ |_p$收敛，就可以使Q依$|\ |_p$完备化，可以证明Q_p就是这种完备赋值域。这样对于所有素数p，我们就都有一个完备赋值域Q_p与之对应。

有了这么多Q_p之后，余下的问题是：

(1) R在其中的地位；

(2) Q上除了以上的范数（或赋值）外还有没有别的？

对于第一个问题的答案是，R与Q_2，Q_3，Q_5，…，Q_p，…的地位是平等的，通常的绝对值可以记为$|\ |_\infty$。在考虑数论问题时，我们只需在所有素数中添加一个素数∞即可。

对于第二个问题，答案是Q上本质上就是这些范数，其它的范数，都可以表为$|\ |_p^s$或$|\ |^s$，其中s是个正实数。这表现在数论中有许多封闭性定理。

封闭性定理 对于任何整数a，

$$\prod_p |a|_p=1,$$

其中p为所有素数加上∞素数。

每一个p进域Q_p中都存在一个整数环Z_p，其元素为

$$Z_p=\{x\in Q_p \mid |x|_p\leqslant 1\},$$

正如有理数域Q中有整数环Z一样。不过在Z中乘法可逆元（单位）只有$+1$和-1，而Z_p中乘法可逆元构成一个群Z_p^*，

其定义为

$$Z_p^* = \{x \in Q_p \mid |x|_p = 1\},$$

这样在 Q_p 和 Z_p 上可以有数论，它是一种局部理论。

3. 有限域

群论研究从有限群着手，但常见的域如有理数域 Q，实数域 R 和复数域 C 都是无限域。由于 1 按照通常加法连加之后，必然得到无穷多个数，因此想到有限域必须跳出通常数的运算模式的范围，这当然得有天才的眼光。1830 年，伽罗华发现有限域，因此后来为纪念他，也称为伽罗华域。他发现的有限域是具有 p 个元素的域，其中 p 为素数。实际上他是把通常整数 0，1，…，$p-1$ 按照模 p 加法和乘法构成一个域，记作 $GF(p)$。

伽罗华对数域有完全清楚的概念，他的出发点是模 p 的同余类，这种想法来自高斯。伽罗华认识到，现在已不是通常整数 a，b，c 的运算，而是其模 p 同余类 $\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{c}$ 的运算，而且这些类的运算可定义为

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \overline{a \pm b},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}。$$

而当 $\bar{a} \neq \bar{o}$ 时，$\overline{b/a}$ 就定义为同余方程

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

的整数解 x 的同余类。不难验证，这些模 p 的同余类构成一个域。他证明，对于 a，$b \in GF(p)$，下列等式成立：

$$pa = 0,$$

$$(a+b)^p = a^p + b^p,$$

$$a^p = a。$$

伽罗华没有就此而止，他还考虑高次同余式的解法问题。

实际上，高斯早在考虑，如二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

的解，但高斯只考虑有理整数解。但伽罗华更有创造性。他问，是否能够引进无理解，更进一步，对于任一模 p 不可约整系数多项式 $F(x)$，是否能添加新“符号”，使得

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

有解。正像通常代数中添加虚数 i，使

$$x^2+1=0$$

有解一样。

如果 $F(x)$ 为 n 次不可约多项式，i 是一个根，他于是造出 p^n 个表达式

$$a+a_1 i+a_2 i^2+\cdots+a_{n-1} i^{n-1},$$

其中 a，a_1，…，$a_{n-1} \in GF(p)$。不难证明这 p^n 个元素构成域，这样他得到了除了 $GF(p)$ 之外的有限域，即阶数为 p^n 的有限域。那么有限域是否只限于伽罗华出现的伽罗华域呢？1893 年美国数学家莫尔证明，任何一有限域必定与某一个伽罗华域同构。反过来，对于任意素数 p 和正整数 a，必定存在唯一一个伽罗华域，具有 p^a 个元素。这样有限域的列举及分类问题完全解决。有限域理论在数论、编码理论、组合理论及数理统计等方面有着许多应用。

伽罗华还证明了下面的定理：

定理 F 的乘法群 $F^{\times}$ 是一个 p^n-1 阶循环群而且是 $X^{p^n}=1$ 的全部根。

不过他只对 $n=1$ 的情形证明存在本原元素 α，其它根都可以写为

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{p^n-1}。$$

换言之，GF（p）的任何扩张 GF（p^n）都是单扩张。

有限域的子域定理 对于 n 的每个因子 d，GF（p^n）中存在唯一个子域 GF（p^d），特别每个 GF（p^n）包含 GF（p），GF（p）称为特征 p 的素域。GF（p）与整数环 Z 模 p 的剩余类域同构。

但值得注意的是，Z 模 p^n 的剩余类并不是域，因此更谈不上同 GF（p^n）同构。反之，如果 GF（p^n）是 GF（p^d）的一个扩张，则它是正规扩张，其伽罗华群是 n/d 阶循环群。

4．函数域

以上谈到的数域是抽象域的概念的主要来源，这也是域比较容易理解、容易处理的原因所在。抽象域当然不能局限于只以数为元素的集合，具体的域还有许多元素不能表为数的情形，最简单的是函数域。

如果已知一个域 K，另外还有一个未定元或者变元 x，所有由 K 的元素以及 x 通过加、减、乘、除（0 不做分母）所得到的所有形如

$$\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

的元素（分母不为 0）集合称为有理分式域或者 x 的有理函数域，记作 K（x），同样，可以造出两个变元或多个变元的有理函数域 K（x，y）等。这时，x，y 等都是独立的自由变量，K（x）可以看成是 K 的扩域，K（x，y）可以看成是 K（x）的扩域，如此等等。

现在我们可以考虑两变元 x，y 之间具有关系的情形。最简单的关系是 x，y 满足一个系数取在 K 中的代数方程

$$F(x, y)=0。\qquad (1)$$

为了方便，我们可以取 $F(x, y)$ 为不可约多项式，这样(1)式就代表一条代数曲线 S。现在我们考虑 S 上的有理函数域。为此，我们考虑定义在 S 上的点 (x, y) 上的有理函数 $\varphi(x, y)$，它可以表示为

$$\varphi(x, y)=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}。 \tag{2}$$

我们假定 $Q(x, y)$ 不被多项式 $F(x, y)$ 整除，这样在(1)上只有有限多个点 (x, y)，即同时满足联立方程

$$\begin{cases}Q(x, y)=0,\\F(x, y)=0\end{cases}$$

的点，在它们的上面，$\varphi(x, y)$ 没有定义。这样得到的函数 φ，称为曲线 S 的有理函数，所有这类函数构成域，称为曲线的有理函数域，记作 $K(S)$。它的重要性在于，它是曲线的双有理不变量，也就是当通过有理坐标变换

$$\begin{cases}x'=f(x, y),\\y'=g(x, y)\end{cases}$$

来变换坐标系时，$K(S)$ 保持不变。例如实数平面上单位圆 S：

$$x^2+y^2=1,$$

其 $K(S)$ 与一变元有理函数域 $K(t)$ 同构，这个域也可看成包含 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的所有有理函数的域，这种曲线称为有理曲线。它也反映曲线可以用一个变元的有理函数来参数化，例如

$$\begin{cases}x=\dfrac{2t}{1-t^2},\\y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}。\end{cases}$$

但是，一般三次及三次以上曲线就不是有理曲线，例如

$$E: y^2 = x^3 + 1,$$

它的 $K(E)$ 就不同构于 $K(t)$，它称为椭圆曲线。一定注意，椭圆曲线不是椭圆，它是三次曲线，而椭圆是二次曲线，而二次曲线都是有理曲线。

同样，在复平面上的连通区域上的所有单复变数亚纯函数也形成一个域。更进一步，任意连通复流形上的连通区域上的所有亚纯函数也构成一个域。

5. 形式实域

实数域具有代数结构、序结构和拓扑结构三种结构的多重结构。在抽象的研究中，我们往往加以简化，以实数域为模式，单纯考虑拓扑域，或者单纯考虑有序域。

实数域在通常的序关系≤下构成一个全序域。与它对照，复数域就不能引入一个全序结构使之成为全序域。因为一个域可以引入全序成为全序域的充分必要条件是 -1 可写成平方和。这样的域我们称为形式实域，简称实域。实数域就是形式实域的模型。

形式实域是 1927 年由阿廷同他的学生施莱尔引进的，他们由此解决了希尔伯特第 17 问题，这也是抽象方法的伟大胜利。他们研究这个问题的出发点是刻画实代数数域。他们把这些域的特点总结成"实域"的概念。他们把实域定义为这样的域：在域中 -1 不能表为域中元素的平方和。显然任何全序域是实域。他们还仿照"代数封闭"定义"实封闭"，也就是一个域再不能有真的实代数扩张域。阿廷等证明"实封闭域可以唯一的方式排序"。由此他们几乎无中生有地建立起整个实域理论。

在实域的抽象理论基础上，希尔伯特的第17问题就不难解决了。希尔伯特的问题的出发点是他1888年的一个结果。如果$f(x_1, \cdots, x_n)$是n个变元的实系数多项式，假如$f(x_1, \cdots, x_n)$"正定"，也就是说，对于任何一组实数值$(a_1, \cdots, a_n)$，$f(a_1, \cdots, a_n)$的值都大于或等于零，即永远不取负值。当然，$f(x_1, \cdots, x_n)$要是能够表示成n个实系数多项式$f_1, \cdots, f_m$的平方和，那么$f(x_1, \cdots, x_n)$显然正定。希尔伯特问，反过来，如果$f(x_1, \cdots, x_n)$正定，它是否能表示为一些实系数多项式的平方和呢？希尔伯特发现，除非$n=1$，也就是一个变元，这事才对。于是希尔伯特退一步问：要是两个正定多项式的商，也就是有理分式，情况又如何呢？当然这一回就是要表示为实系数有理分式的平方和了。不过取值的时候注意不让分母为零就是了。1900年希尔伯特提出这个问题以后，进展不大，因为大家不知如何下手。1926年，阿廷在"实域"理论的基础上，轻而易举地解决了这个问题。他不仅肯定解决了希尔伯特原来的问题，而且大大超过原来的限度，实系数有理分式的函数域可以换成任意实域。不仅如此，他还能定出表为多少个有理分式的平方和。整个问题解决得干净漂亮，使许多人赞叹不已。这也反映出他不是为抽象而抽象，真正能够运用抽象概念解决具体问题，而且在解决问题的同时也发展了抽象理论。

正如域的基本问题是域的扩张一样，全序域P如果包含全序子域K，则P称为K的全序扩张。而这只有当-1不能表为形如λx^2元素的和时才可能，其中$\lambda \in K$，$\lambda \geqslant 0$，$x \in P$。如果一个全序域不含真的有序代数扩张则称为实闭域。实闭域的序关系是唯一决定的。对于全序域K，下列条件等价：

(1) K 是实闭域。

(2) K (i) 是代数封闭域。

(3) K 中每个正元素是一个平方，且 K 上每个奇阶多项式在K 中具有一个根。

5.2 拓扑空间

几何图形最简单的是直线和圆，它们与离散集合最明显、最直观的区别在于它的连续性。可是什么是连续性？对连续性的本质探讨形成了一种新的结构——拓扑结构，它演化成一门新学科——一般拓扑学。

从数与形的明显区别可以看出，用有限的对象来描写无穷的对象以及用离散的对象来描写连续的对象势必遇到极大的、甚至是不可克服的困难。不可通约量的发现实际上表明无法用有理数来穷尽所有几何量。因此，用数表量遭到失败。这样，我们就反其道而行之，把所有量都接受为数，这就是实数。实数集合与直线上的点一一对应。这样的直线，我们称为数直线，通常记作 R。

R 是数学中最基本的对象，在 R 上面也存在所有基本结构：代数结构，域；序结构，全序集；它也存在拓扑结构。它的拓扑结构也是以后定义一般的抽象拓扑结构的出发点。由于拓扑结构是对其连续性的刻画，它的原始思想自然源于连续函数的观念。连续函数是最简单的连续映射，而连续映射 $f: X\longrightarrow Y$ 区别于一般集合的映射之处在于：集合的映射可以把 X 的任何一个元素映到 Y 的任何一个元素。而连续映射则受到很大的限制，正像连续函数一样，它不仅把 X 的任何一个元素 x 映到 Y 的任一元素 y，还要求 y 的“邻近元素”也是 x

的“邻近元素”的象。

对于“邻近元素”的概念精密化，就得出 R 的邻域的概念。

邻域 R 的子集 V 称为点 x（$\in R$）的邻域，如果 V 包含一个含有 x 的开区间。

R 上的开区间是很直观的，它是指任何形如（a，b）（$a<b$），（$-\infty$，a），（a，∞）的集合以及 R 和空集 $\varnothing$，其中 a，$b\in R$。

邻域具有如下的性质：

$V1$　x 的每一邻域都包含 x。

$V2$　包含 x 任一邻域的集合仍是 x 的邻域。

$V3$　x 两个邻域的交集仍是 x 的邻域。

$V4$　x 的每个邻域 V 都包含 x 的另一邻域 W，使 W 的每一点都以 V 为邻域。

$V5$　（豪斯道夫性质）如 x，y 为两个不同的点，则存在 x 的邻域 V 与 y 的邻域 W，使 $V\cap W=\varnothing$。

可以看出，邻域的概念和性质完全取决于对于开区间的规定。而 R 的开区间完全由 R 的全序性质得来。但一般的集合当然不一定有 R 那样好的全序结构，因此，我们就必须把 R 上开集（也就是有限或无穷多个开区间的并集）的性质抽象出来，成为一般集合中的开集概念。

由于我们现在一点具体的依靠也没有了，定义一般集合的抽象开集只是通过把 R 中开集的性质加以公理化即可。

开集 集合 S 中一族子集合称为开集族，如果它的元素——开集满足：

$O1$　任意多（有限或无穷多）开集的并集仍是开集。

$O2$ 有限多开集的交集仍是开集。

$O3$ S 及 $\varnothing$ 是开集。

对于 S 中的开集，有对偶的概念——闭集。所谓闭集，就是它在 S 中的补集是开集。由上述公理，可得出闭集的公理：

$F1$ 任意多个闭集的交集是闭集。

$F2$ 有限多个闭集的并集是闭集。

$F3$ $\varnothing$ 及 S 是闭集。

显然 R 中闭区间是闭集。因此，开、闭的概念与 R 中开区间、闭区间有密切关系。但是它们与通常的开区间和闭区间仍稍有不同。例如，开区间的并不一定是开区间。但是这样的拓广对拓扑学的发展很有好处。

注意，在一般情况下，在一个集合中既存在着开集和闭集，也存在着既开且闭的集合，更存在既不开也不闭的集合(例如实数直线上半开区间)。更重要的是，对同一个集合 S，可选不同的开集族。每当选定一个开集族时，就称为 S 被赋予一个拓扑结构，简称拓扑，具有给定拓扑的集合称为拓扑空间。

选出一个集合的开集族满足开集公理是现在定义拓扑的标准方法。实际上，它的产生是比较晚的。早先的定义有许多，特别是 1914 年豪斯道夫是通过邻域的 5 条性质 $V1$ 到 $V5$ 来定义拓扑的。这样得到的是可分豪斯道夫空间，而对于集合 E，对每一点 $x\in E$，选择一系列子集，满足 $V1$ 到 $V3$，称为 x 的邻域 $V(x)$，也可以等价地定义 E 上的拓扑，使 E 成为拓扑空间。用邻域定义的拓扑更接近拓扑的本意，即点与点、点与集合的邻接性质，用它来定义连续映射时，显然更接近于数学分析中的连续函数，也就是 $f(x)$ 一点邻域的原象

一定落入 x 的某邻域之中。

另一种定义拓扑的方法是利用闭包算子，它可以用公理来定义：对集合 E 中任何子集A，都可以指定子集 $\overline{A}$ 与之对应，并满足下列 4 条公理：

$C1$　$\overline{\varnothing}=\varnothing$，$\overline{E}=E$。

$C2$　对所有子集 $A\subset E$，$A\subset\overline{A}$。

$C3$　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$。

$C4$　对所有子集 A，$\overline{A}=\overline{\overline{A}}$。

则映射 $A\longrightarrow\overline{A}$ 称为闭包算子。定义闭包算子后可以定义 E 中的闭集A，它们就是满足 $A=\overline{A}$ 的集合，而且这些闭集满足 $F1\sim F3$，因此定义 E 的拓扑。这样，通过定义闭包运算也可以定义拓扑，这种方法首先是波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski，Kazimierz，1896—1980）在他的名著《拓扑学》Ⅰ（1922）中首先给出的。

在拓扑的种种应用中，常常用度量空间（X，ρ）来定义拓扑，这时点 x 的邻域可定义为

$$U(x)=\{y\mid y\in X,\ \rho(x,y)<\epsilon\},$$

那么它们的全体构成 x 的邻域系，它自然引入拓扑。

如 E、F 是两个拓扑空间，那么现在我们要问什么时候两个拓扑空间一样，或者说它们同胚（*homeomorphism*）。E 到F 的同胚映射不仅要求集合E 和F 一一对应，而且要求存在 E 到F 的一一连续映射f，而且逆映射 f^{-1}也是连续的。所谓连续映射，它是连续函数的自然推广，也就是 F 的每个开集的原象也是开集。另一种映射也很常用，它就是开映射。开映射是指开集的象也是开集的映射。因此，如果一个由拓扑空间 E 到拓扑空间F 的双射（即一一且映上的映射）f 既是连

续映射又是开映射，则 f 是同胚映射。这样，只要存在一个同胚映射把 E 映到 F 上，我们就称为 E 和 F 同胚。同胚的拓扑空间是拓扑结构之间的一个等价关系，我们看成它们一样，从而刻画它们拓扑性质的拓扑不变量也相同。

通过开集（或其它方法）定义拓扑，使得我们有可能在同一个集合上以不同的方式选取不同的开集族，从而产生不同的拓扑结构。实际上每个集合 S 至少有两种极端的选取法。一种是最粗的拓扑，即在 S 中只选 S 和 $\varnothing$ 为开集。另一种是最精的拓扑，即 S 中所有子集合（包括 S 和 $\varnothing$）都选为开集。这种拓扑也称为离散拓扑。这两种选取显然都满足开集的公理，从而可以定义拓扑结构，它们常被称为平凡的拓扑。

对于集合 S 来讲，如果有其它的拓扑存在，它们都介乎这两个极端的拓扑之间。一般来讲，这些拓扑彼此之间的粗精程度不一定可以比较，但是其中有些可以比较。大致讲，如果拓扑 τ_2 的开集也是拓扑 τ_1 的开集，则说 τ_1 拓扑比 τ_2 拓扑精，或 τ_2 比 τ_1 粗。如果 τ_1 比 τ_2 精，同时 τ_2 也比 τ_1 精，则 τ_1 和 τ_2 等价，即赋予这两种拓扑所成的拓扑空间同胚。利用拓扑的粗精观念及连续映射，我们可以在任意集合 E 上诱导出拓扑结构。方法如下：

设 f 是一个集合 E 到拓扑空间 F 的映射，定义 F 的所有开集 O 的原象 $f^{-1}(O)$ 的集合为 E 的开集，显然 $f^{-1}(O)$ 的集合构成 E 的开集族，并满足公理 $O1 \sim O3$，它形成 E 上的拓扑。这样，E 成为拓扑空间，并且这个拓扑乃是 E 上使 f 为连续的最粗的拓扑。

通过诱导拓扑的方法，我们可以在拓扑空间 S 的子集 A 上诱导出拓扑，这只需要嵌入映射

$$f: A \longrightarrow S$$

即可。同样，对于若干个拓扑空间 E_i 的直积 $\prod_i E_i$ 也可以通过使一切投影映射

$$f_i: \prod_i E_i \longrightarrow E_i$$

均为连续，来诱导出 $\prod_i E_i$ 的最粗拓扑结构，这样形成的拓扑空间称为积空间。

另一种定义拓扑的方法是从拓扑空间 X 诱导 Y 的拓扑，使得 $f: X \longrightarrow Y$ 连续的 Y 的最精的拓扑，这是利用射影 $X \longrightarrow X/R$ 定义商空间 X/R 的拓扑的方法。

下面我们看一下拓扑空间最基本的性质：

1. 基数不变量

拓扑空间 E 中定义拓扑的所有开集如果可以通过一个开集族 B 中开集的并集构成，则 B 称为 E 的基。E 的所有基中势最小的称为空间 E 的权。例如，实数直线（或实数区间）的开集的基可以取为所有开区间，这时基的势为 c，也可取为端点均为有理数的开区间，这时基的势为 $\aleph_0$。因此实数直线作为拓扑空间的权为 $\aleph_0$，对于基的权为 $\aleph_0$ 的拓扑空间，我们称它为满足第二可数公理。

第二可数空间一定是第一可数的同时具有稠密可数集。第一可数公理是指每一点均有局部可数基。存在稠密可数集的空间也称可分空间。实际上以实数直线 R 为模型，其中有理数集 Q 在 R 中稠密。但一般可分空间甚至不一定满足第一可数公理。

2. 分离公理

分离公理研究拓扑空间中的点或闭集被开集分开的程度，

刻画这种分离程度的中心，是越来越强的6条公理：

设（X，τ）为拓扑空间，τ 表示定义拓扑的开集族，O（a）表示包含 a 点的开集，a，b 表示两不同的点。

公理 T_0 若 a，$b \in X$，则存在开集 $O \in \tau$，使得或者 $a \in O$，$b \notin O$，或者 $a \notin O$，$b \in O$。

公理 T_1 若 a，$b \in X$，则存在开集 O（a），O（b）分别包含 a，b，使得 $b \notin O$（a），$a \notin O$（b）。

公理 T_2 若 a，$b \in X$，则存在开集 O（a），O（b），满足 $O(a) \cap O(b) = \varnothing$。

公理 T_3 若 A 为闭集，$b \notin A$，则存在包含 A 的开集 O（A）和 O（b），满足 $O(A) \cap O(b) = \varnothing$。

公理 T_4 A，B 为 X 中不相交闭集，则存在分别包含 A，B 的开集 O（A），O（B），满足 $O(A) \cap O(B) = \varnothing$。

公理 T_5 A，B 为 X 中不相交集，则存在分别包含 A，B 的开集 O（A），O（B），满足 $O(A) \cap O(B) = \varnothing$。

最常用的空间是满足公理 T_2 的空间，称为豪斯道夫空间。欧氏空间和流形在通常拓扑之下是豪斯道夫空间，但代数几何中常用的查瑞斯基拓扑则不满足公理 T_2。豪斯道夫空间的特点是任何两不相同的点都可以通过不相交的开邻域隔离开。

公理 T_1 则比公理 T_2 弱得多，它只要求一点的开集不包含另一点。满足公理 T_1 的空间称为弗瑞歇空间。弗瑞歇空间的一个刻画是它的所有点都是闭集。

公理 T_0 又比公理 T_1 弱，T_0 空间也称柯尔莫哥洛夫空

间。

显然，豪斯道夫 T_2 空间是 T_1 空间，T_1 空间是 T_0 空间，但反过来不成立。

对于满足后面三个公理的空间，在文献中有不同的名称，这里分别称为 T_3 空间、T_4 空间和 T_5 空间，而定义

正则空间 = $T_3 + T_0$ 空间；

正规空间 = $T_4 + T_1$ 空间；

全正规空间 = $T_5 + T_1$ 空间。

只有在这种定义之下，有如下蕴涵关系：

全正规空间⇒正规空间⇒正则空间⇒ T_2 空间，但箭头反过来不成立，它们都存在反例。

在正则空间和 T_2 空间之间还可以加上空间 $\overline{T_2}$，满足：

公理 $\overline{T_2}$ 若 a，b 为拓扑空间 X 两个不同点，则存在开集 $O(a)$，$O(b)$ 分别包含 a，b，它们的闭包互不相交，即

$$\overline{O(a)} \cap \overline{O(b)} = \varnothing。$$

$\overline{T_2}$ 空间也被称为全豪斯道夫空间。

至此，我们只是考虑拓扑空间的邻域分离性，它们是抽象的。但是，我们对实数直线及其拓扑比较清楚，而且它有度量也比较具体。这样，我们可以通过拓扑空间 E 上的连续函数来更好地了解 E 的拓扑结构。由于拓扑空间 E 上连续函数的定义同通常数学分析的定义相近，我们不难理解，由拓扑空间 E 到实数直线 R 的映射 f 是连续的，当且仅当对于每点 $x \in E$ 及 $\varepsilon > 0$，都存在 x 的邻域 U，使得

$$y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon。$$

问题是任意取一个拓扑空间 E，其上是否存在连续函数？显

然是存在的，至少平凡的连续函数

$$f(x) \equiv a,$$

即常函数总是存在的。然而除去这种平凡的连续函数之外，还有没有非平凡的连续函数？连续函数对拓扑空间的性质决定到什么程度？

关于第一个问题，对于拓扑空间 E 来讲，空间存在一个非常数的连续函数等价于空间中至少有两个函数分离的点。所谓两点 a，b 函数分离，是指存在一个连续函数 $f(x)$，使 $f(a)=0$，$f(b)=1$。关于这个问题，可以有如下定理：

定理 若一个拓扑空间，任意两个不同点都函数分离，则它一定是豪斯道夫空间。

但其逆定理不对，苏联数学家乌雷松在他去世前三天完成他最后一篇论文，举出一个复杂的反例。

正则空间比豪斯道夫空间分离性更强，但是仍然存在正则空间，其上每个连续函数都是常数值函数。第一个例子是苏联数学家劳赫瓦格尔（Rauchwager，Irina，1918—）在 1945 年发表的，距乌雷松的例子达 20 年之久。另一方面，任意两个点都函数分离，那么它是否是正则空间呢？答案也是否定的。

更进一步，对于正规空间，我们有更强的函数分离的结果，这也是乌雷松在 1924 年得出的：

定理 E 是正规空间，当且仅当 E 中任意两个不相交闭集 A 和 B 是函数分离的，也就是说，存在 E 上连续函数，在 E 上取值为

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

使得

$$f(x)=0, \text{ 当 } x \in A,$$

$f(x)=1$，当 $x\in B$。

乌雷松还证明 E 为正规空间的另外一个充分必要条件，即：

有界连续函数延拓定理 对于 E 上任意一个闭集 A 上的有界连续函数可延拓成整个 E 上的有界连续函数 g，使得对 $x\in A$，$f(x)=g(x)$。

1938 年苏联数学家维捷尼索夫（Vedenisov，N. B.）推广到无界连续函数上，即函数值可取无穷。

为了找到点与闭集能函数分离的拓扑空间，苏联数学家吉洪诺夫在正则空间和正规空间之间，引进全正则空间，它是 T_1 空间并满足函数分离公理 $T_{3\frac{1}{2}}$：

公理 $T_{3\frac{1}{2}}$ E 中任意一点与任意不包含这点的闭集是函数分离的，即对任意一点 x 及 x 的邻域 V，存在 E 上一个连续函数 $f(x)$，

$$0\leqslant f(x)\leqslant 1,$$

使得

$$f(x)=0，且对 y\notin V 时，f(y)=1。$$

全正则空间因此也被称为吉洪诺夫空间。

吉洪诺夫还引进了吉洪诺夫立方体，即单位区间 $I=[0,1]$ 的一个幂 I^{τ}。

当 $\tau=n$ 是正整数时，I^{τ} 是 n 维欧氏空间的立方体，它是一个度量空间，拓扑由内积度量诱导而来。

当 $\tau=\aleph_0$ 时，I^{τ} 同胚于希尔伯特立方体。

当 τ 为无穷基数时，$\tau=I^{\tau}$ 的权。

吉洪诺夫立方体的重要性之一在于它是全正则空间的万有空间，也就是任何一个全正则空间都同胚于 I^{τ} 的一个子空间。

3．紧性

紧性来源于数学分析中的定理，特别是波尔查诺(Bolzano，Bernard，1781—1848)—魏尔斯特拉斯定理：任何有界数列均含有收敛子序列。对于 n 维欧氏空间的有界（无穷）集，在该空间中一定有极限点。在复分析中有蒙太尔(Montel，Paul，1876—1975)的正规族理论。海涅—波莱尔定理，或波莱尔—勒贝格定理更直接显示出紧性的特征。它完全刻画 R^n 中有界闭集的特性。据波莱尔—勒贝格定理，R^n 中的有界闭集 A，如果有一个开覆盖，也就是一组开集 $\{O_i\}$ 使得 A 包含在这组开集的并集之中，即

$$A \subset \bigcup O_i,$$

则在这组开集中，可以选出有限多开集，也构成 A 的覆盖。反过来，R^n 中子集 A，如果其任何开覆盖都可选出有限子覆盖，则 A 是有界闭集。因此，如果我们把集合 A 的任何开覆盖都可选出有限子覆盖作为集合 A 是紧集合的定义的话，我们可以得出：R^n 的子集 A 是紧集当且仅当它是有界闭集合。

但是，一般拓扑学和泛函分析研究的对象远远超过欧氏空间中的集合，特别是无限维空间以及特殊的拓扑。这时，具有紧性和不具有紧性对集合的性质大有关系。紧性空间最接近有限维空间的性质，它使我们把大范围的研究归结为局部的研究。由此，许多存在定理可以得到证明。例如，紧空间上定义的连续实值函数一定是有界的，且可达到其极大值或极小值。许多变分问题的存在定理就要求这样的结果。

因此，紧的朴素概念在数学分析中早就使用。抽象的紧性概念应该来源于法国数学家弗瑞歇的可数紧概念。它要求可数开覆盖有有限子覆盖。到 1922 年左右苏联的亚历山大洛夫(Aleksandrov，Pavel，1896—1982)和乌雷松引入更强的双紧

概念，后来由布尔巴基简化为紧的概念。

现在公认的紧性的抽象定义为：一个拓扑空间 X 紧，如果每个开覆盖包含一个有限子覆盖。

它有一些等价性质，其中包括有限交公理。

有限交公理 如任何闭子集族，其交集为空集，则包含有限闭子集子族，其交集为空集。

我们可以从几个方面来推广紧的概念：

(1) σ 紧：可数多紧集的并集称为 σ 紧。

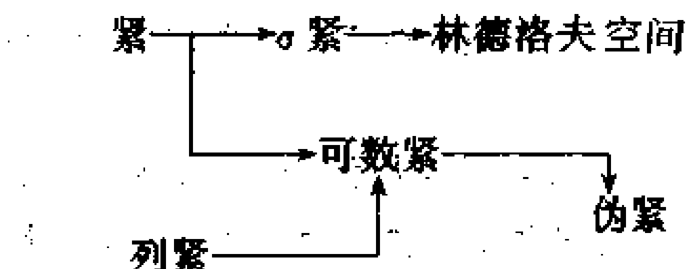
(2) 林德洛夫（Lindelöf, Ernst, 1870—1946）空间，如它的每个开覆盖都包含可数子覆盖。

(3) 可数紧：每可数开覆盖均有有限子覆盖。

(4) 列紧：每序列均有一个收敛子序列。

(5) 伪紧：每连续实值函数均有界。

它们之间有如下蕴涵关系，但反向一般均不成立：



紧空间有极好的性质，其中最突出的是吉洪诺夫定理。

吉洪诺夫定理 任意多个紧空间的拓扑积是紧空间。

紧空间还有许多好的遗传性质，如：

(1) 紧空间的闭子空间是紧空间。

(2) 紧空间的连续映射的象是紧空间。

常用的紧空间大都是豪斯道夫空间，我们可简称为 T_2 紧统，它具有很好的稳定性：

(1) 任意多 T_2 紧统的拓扑积是 T_2 紧统。

(2) T_2 紧统的连续映射象是 T_2 紧统。

下面的性质是 T_2 紧统独有的：

(3) 任一 T_2 紧统是正规空间，从而是完全正则空间。

(4) T_2 紧统的万有空间是 I^τ，即权不超过 τ 的任一 T_2 紧统同胚于 I^τ 的闭子空间。

(5) T_2 紧统可以度量化，当且仅当它具有可数基。这种 T_2 紧统简称为紧统。紧统上任何度量都是完备的且全有界的，反之，具有此性质的度量空间是紧统。

紧统的典型例子是康托尔集，康托尔集是 0 维、完全集和紧统。康托尔集具有万有性质，任一可度量化紧统都是康托尔集的连续系。

另一个重要概念是局部紧。一个拓扑空间称为局部紧，如每一个点均包含在一个紧邻域之中。显然任何紧空间是局部紧的。任何离散拓扑空间是局部紧的，例如整数集合 Z。典型的局部紧但整体不紧的空间是实数直线 R。有理数集 Q 既不紧，也不局部紧。

局部紧豪斯道夫空间与豪斯道夫空间的主要区别在于它不一定正规，但是局部紧豪斯道夫空间具有如下有用的性质：

(1) 任何局部紧豪斯道夫空间是全正则空间；

(2) 一空间是局部紧豪斯道夫空间，当且仅当它可以表为一个紧豪斯道夫空间的开子空间。

每个局部紧豪斯道夫空间 X 都可以通过一个紧豪斯道夫空间 Y 去掉一点而得到，且 Y 由 X 唯一决定。

反过来，一个局部紧豪斯道夫空间都可以通过加上一点而成为紧空间，这个过程称为紧化，它可有多种紧化方法，每一种紧化都使它成为紧化空间的开子集。

实际上，不仅局部紧空间可以紧化，而且任何拓扑空间都可以紧化。

紧化　一个紧空间 cX 称为拓扑空间 X 的紧化，如果 X 是 cX 的子空间，而且在其中处处稠密。

紧化问题是一般拓扑学中一个主要研究题目。基本结果有：

（1）单点紧化，X 添加一点的紧化，记作 αX。它是由苏联数学家 P·S·亚历山大洛夫于 1924 年首先提出来的。例如 n 维欧氏空间 R^n 加上无穷远点后成为 n 维球面，莫比乌斯带单点紧化后成为实射影平面 RP^2，它是非紧的局部紧豪斯道夫空间的唯一豪斯道夫紧化，但它是 X 所有紧化集合 $B(x)$ 中的最小元。

（2）豪斯道夫紧化，如紧化空间是豪斯道夫空间。这是吉洪诺夫于 1929 年引入的。他证明，每一个完全正则空间具有豪斯道夫紧化，而且只有完全正则空间具有豪斯道夫紧化。其权为 τ 的完全正则空间具有权为 τ 的豪斯道夫紧化。空间有不只一种豪斯道夫紧化，其中最大的称为斯通—切赫紧化，记作 βX，它是由美国数学家斯通和捷克数学家切赫（Cech, Edouard, 1893—1960）在 1937 年独立发现的。

对于正规空间 X，其斯通—切赫紧化 βX 具有如下性质：

（1）X 的任何两个不相交的闭子集在 βX 中的闭包仍然不相交。

（2）X 上实值有界连续函数可扩张成 βX 上连续实值函数。

对于完全正则空间，性质（2）也成立，而且还有如下的推广：

(3) 任何由完全正则空间 X 到紧统 Y 的连续映射可扩张成 βX 到 Y 的连续映射。

斯通—切赫紧化对一般测度论、一般线性拓扑空间理论和巴拿赫代数理论来说都至关重要。

狄奥东涅在 1937 年提出了在拓扑学中至关重要的仿紧（*Paracompact*）概念。

对于一个集合 X，任何子集族称为 X 的覆盖，如果这个子集族中子集的并集是 X。在拓扑空间 X 中，我们可选覆盖为开覆盖，即子集族中子集均为开集。选取开覆盖的意义在于它们把拓扑空间 X 的局部信息与整体信息联系在一起，因为开集反映拓扑空间的局部信息，而开覆盖（开集族）的元素数目、相互关系以及组合性质则反映出这些开集是如何拼凑起来成为整个空间的。由于 X 的覆盖是一个子集族，因此 X 的各覆盖之间存在一些关系，最简单的为两种：一种是子覆盖，也就是存在一个子族也是覆盖，这在紧性的定义中是关键的。另一种是加细覆盖，覆盖 $\{V_j\}$ 称为覆盖 $\{U_i\}$ 的加细，如果对每 V_j 都存在 U_i，使 $V_j \subset U_i$。覆盖的另外一个性质是局部有限性，也就是在 X 每一点都有邻域，只同覆盖中有限多个元素相交。这样，拓扑空间 X 称为仿紧，如果对 X 的任何开覆盖都可以找到一个局部有限的加细。常见的仿紧空间很多，它包括所有的度量空间，所有紧空间。不是所有局部紧空间都是仿紧的。但林德洛夫空间是仿紧的，特别是仿紧豪斯道夫空间是正规空间。由于仿紧空间有极好的性质，它在维数论、代数拓扑、微分流形及泛函分析的研究中都至关重要。

4. 连通性

连通性是拓扑空间一个重要的拓扑不变性质，比起紧性

来，它更为直观。例如，通常欧氏平面 R^2 是连通的，除去一点后，其它部分仍然是连通的，但是除去一个圆周时，其余部分就被分成两块，圆内和圆外，它们彼此不连通。这种直观的概念抽象之后得出连通性的定义：拓扑空间 X 如不能表为两个非空的不相交闭集的并集，则称 X 为连通的。

拓扑空间 X 的子集称为连通的，如果它作为 X 的子空间是连通的。连通集的闭包是连通的，连通集的连续象也是连通的，连通集的积也是连通的。对于拓扑空间中每一点 x，包含 x 的所有连通子集的并集是包含 x 的最大连通子集，称为 x 的连通分支。连通分支是闭集，不同的连通分支不相交。

当空间 X 中任意两点 a，b 可由空间中道路连接时，称 X 为道路连通的。所谓连接 a，b 的道路，即是由 $[0, 1]$ 区间到 X 中的连续映射 f，使得 $f(0)=a$，$f(1)=b$。道路连通是一种等价关系，而等价类称为道路连通分支，道路连通分支包含在连通分支之内。但有反例说明反包含关系不成立。因此道路连通的拓扑空间也是连通的。在数学中常用的概念是区域，它是开连通子集。欧氏空间中区域和凸子集是道路连通的，因而也是连通的。

局部连通性是指对每点 x 和任何邻域 $V(x)$，都存在 x 的较小的连通邻域 $U(x)\subset V(x)$。局部连通空间的任何开子集都是局部连通的，且其任何连通分支都是开且闭集合。空间局部连通的充分且必要条件是其开集的连通分支也是连通的。与连通性不同，局部连通空间的积与连续象未必是局部连通的，但是局部连通空间的开映射及闭映射的象也是局部连通的。同样可以定义局部道路连通空间，它也是局部连通的。反过来，我们有具有完备度量的局部连通空间是局部道路连通的。

连通空间的对立面为完全不连通空间，在这种空间中任何点的连通分支就是这点本身。完全不连通空间的拓扑积与它的子空间均为完全不连通空间。

在数学中，连续统（*continuum*）是一个常用的词。从来源上来看，它通常是指实数直线 R，或者其上的区间，这时着重考虑它的“连续性”特别是它的基数的一方面，例如，连续统假设。但是，连续一词往往是对于映射来讲，而不对于集合来讲，即使用也往往指可用 R 来参数化。对于实数 R 集合，说它连续实质上是指它完备，它不仅像有理数集合那样“稠密”，即任何两个不同的有理数之间总有无穷多有理数，而且其中的所有“孔”都要补好，从而连成一片。从一般拓扑学来讲，连续统定义为连通紧集合。当然这样一来，我们要求去掉退化的情形，因为单点集也是连通紧集合，它和我们讲的连续统就大相径庭了。这样，闭区间、圆、凸多胞形等均为连续统。而且连续统也不限于实数集合了。

连续统具有如下性质：

（1）具有一个公共点的两连续统的并集是连续统。

（2）连续统的拓扑积是连续统。

（3）连续统的连续象是连续统。从这点看，连续统概念符合“连续”的原意。

（4）紧统的连通分支是连续统。

（5）连续统不可能分解为非空不相交闭集的可数并集。这是波兰数学家谢尔宾斯基（Sierpinski，Waclaw，1882—1969）证明的。

（6）每一个局部连通的，具有度量的连续统是闭区间的连续象。这充分显示出连续统的本来意义。

5. 度量空间与可度量化问题

拓扑空间的概念是具体空间多次抽象而成。因此很不易理解。但是，拓扑空间正如其它的抽象概念一样，是由具体概念抽象而来，而后又可以实现成为具体的概念。产生拓扑空间的重要一步是弗瑞歇在 1906 年引入度量空间概念，而度量空间又是从欧氏空间抽象而来的。

n 维欧几里得空间 R^n 中两点

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

和
$$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

之间的距离为

$$\rho(x, y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}\geqslant 0。$$

这个距离满足：

$E1$ $\rho(x, x)=0$。

$E1'$ $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$。

$E2$ $\rho(x, y)=\rho(y, x)$。

$E3$ （三角形不等式）对任意三点 x，y，z，

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)。$$

弗瑞歇于是定义距离空间为点集 X，在乘积空间 $X\times X$ 上，定义到非负实数的映射

$$\rho: X\times X\longrightarrow R^+,$$

R^+表示 $[0, \infty)$，满足公理 $E1$，$E1'$，$E2$，$E3$。这时称 X 被赋予度量或距离 ρ，而 (X, ρ) 称为度量空间或距离空间。

如果 ρ 只满足公理 $E1$，$E2$，$E3$，则 ρ 称为伪距离，(X, ρ) 称为伪度量空间。

度量空间 (X, ρ) 可以自然地引入拓扑，使之成为拓扑空间。最简单的方法是对任何点 x 及任何正数 $\epsilon>0$，取 x 的 ϵ

邻域

$$U_\varepsilon(x) = \{y \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

的集合为 x 的基本邻域系，从而可以拓扑。为此，只需对所有 x，所有 $\varepsilon>0$，取所有的 $U_\varepsilon(x)$ 为开集的基即可。具有由度量引入的拓扑空间仍称度量空间。

由度量引入的拓扑有如下的性质：

(1) 每度量空间是 T_2 分离的，即它是豪斯道夫空间。

(2) 度量空间满足第一可数公理。

(3) 度量空间是正规空间，而且是完全正规空间。

(4) 度量空间是仿紧空间。

(5) 度量空间的子空间也是度量空间。

(6) 有限个或可数个度量空间的积也可以引入度量使得所得的拓扑与各空间乘积拓扑一致。

(7) 度量空间 X 满足第二可数公理当且仅当它是可分的，即有可数稠密子集。这条件也等价于 X 是林德洛夫空间。

对于伪度量空间也可以定义拓扑，它也满足第一可数公理，但一般不是豪斯道夫空间。

对于度量空间 (X, ρ)，可用 $\rho(x_m, x_n)$ 定义基本序列或柯西序列。这时可仿照康托尔把有理数集合 Q 完备化的方法，使得度量空间的所有基本序列都收敛，从而使度量空间 (X, ρ) 完备化。紧度量空间是完备的，反之，度量空间是紧的当且仅当它完全有界且完备。这里完全有界是指对任何 $\varepsilon>0$，都存在直径不超过 ε 的有限覆盖。

由于度量空间有巨大的优越性，自然产生如下的问题：拓扑空间可否赋予度量，使之成为度量空间？这是一般拓扑学中极重要的度量化问题。上面列举度量空间的性质(1)～(4)都是

必要条件，但不是充分条件。而且它们合在一起也不是，这就增加了问题的难度。第一个给出拓扑空间可度量化充分条件的是苏联数学家乌雷松，他于 1923 年证明：具有可数基的正规空间可度量化。1925 年吉洪诺夫改进为具有可数基的正则空间可度量化。1917 年美国数学家奇特顿（Chittenden, Edward Wilson, 1895—1977）给出第一个充分必要条件，1923 年，P·S·亚历山大洛夫和乌雷松给出第二个充分必要条件：

X 是 T_1 空间，X 有可数个开覆盖族 M_1，M_2，…满足：

（1）对于 U_1，$U_2 \in M_{n+1}$，若 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$，则存在 $U \in M_n$，$U_1 \cup U_2 \subset U$；

（2）对于 X 的任意点 x，取包含 x 且属于 M_n 的任意开集 U_n，则 $\{U_n\}$ 是基本邻域系。

其后许多人都对此加以改进。到了 1950 年，日本数学家长田润一（Nagata, Jun-iti, 1925—）、苏联数学家斯密尔诺夫（Smirnov, Yuri, 1921—）独立地得出新的度量化判据：

空间 X 可度量化当且仅当 X 正则，且具有可数多个局部有限覆盖，这些覆盖的并集形成 X 的基。

同时美国数学家柄（Bing, R. H. 1914—1986）引入类似的判据，只是把局部有限族换成离散族。他还证明：

空间 X 可度量化当且仅当它是集体正规空间且具有可数的开覆盖的加密族。

6．维数

维数理论与连续统理论是几何中最古老的分支，这主要由于这两个概念是非常直观的。解析几何产生之后，我们知道空间中每个点和三个实数之间存在一一对应，自然认为我们的空间是三维空间。同样，平面是二维空间，直线和曲线是一维空

间，孤立点是0维空间。这个维数符合我们直观的概念，也可以自然推广到高维空间。

点集论出现之后，两个事实令人吃惊：一是康托尔在1878年发现，一条直线上的一点与一张平面上的点可以一一对应，也就是它们具有相同的势。这大大背离了人们的传统观念——维数的不变性。由于康托尔的对应不是连续的，他猜想连续映射不可能这样。出乎意料的是，意大利数学家皮亚诺发现另一个惊人的事实：一条直线段可以连续地映满一个正方形。于是出现问题：维数是不是拓扑不变量?

法国大数学家庞加莱发现维数是空间的“拓扑”性质，他通过三维空间的一些现象总结出来维数的本质：一个点可以把一条线段分成不相连结的两段，也就是0维空间可以把一维空间分成不相连结的两部分；但是一个点不能把一块曲面，比如说皮亚诺那个正方形，分成不相连结的两部分，由这样的性质可以判断一条线段和一块曲面的维数不一样。同样，一个一维图形——圆圈可以把二维的曲面，比如说球面和环面，分成不相连结的里外两部分，但是一维图形却不能把一块三维的实心球分成不相连结的两部分。二维图形却可以把三维空间分成两部分，这样我们就可以一步一步地归纳定义维数了。这样定义的维数称为归纳维数，记作 ind$X$。在这个意义下，布劳威尔在1911年证明，维数是拓扑不变量。他的证明很不简单，基于单形逼近的方法。

维数的另外一个定义来自勒贝格。他的思想来源于覆盖重数的定理。这个在直观上也很明显，我们用同样大小的方砖铺地，不管砖大小如何，总可以找到一种铺法，使得每一点最多铺上3块砖。如果砌一堵墙，每点最多有4块砖相邻。1911

年，他宣布这样的定理：

勒贝格覆盖定理 对任意 $\epsilon>0$，n 维正立方体 I^n 都存在一个由闭集构成的有限闭覆盖，其每个闭集的直径 $<\epsilon$，且每点的覆盖重数 $\leqslant n+1$。

但是勒贝格本人的证明有毛病。第一个严格证明是布劳威尔在 1913 年给出的。勒贝格本身的严格证明是 1921 年发表的。由此，可得出一般拓扑空间的维数定义。

拓扑空间的维数 拓扑空间 X 的维数：

当 $X=\varnothing$ 时，定义 $\dim X=-1$；

当 X 非空时，如 X 的任意有限开覆盖都可以找到一个细化，使得其重数 $\leqslant n+1$（$n=0, 1, \cdots$），则 X 称为 $\leqslant n$ 维，记作 $\dim X\leqslant n$。

定义 $\dim X=\{\min n \mid \dim X\leq n\}$，

如 $\dim X=n$，称 X 是 n 维的。

当 X 为 n 维欧几里得空间时，可证

$$\dim X=n。$$

对于可度量化空间

$$\dim X=\operatorname{ind} X。$$

维数理论是一般拓扑学的重要分支，有着重要应用。

5.3 点集纲性与测度

从康托尔创立集合论起，就对一条直线上或一个区间上的点集感兴趣。数学家总是希望找到一些特殊结构的集合，也就是除了孤立点和区间之外的集合。而这两类集合显然是最常用的，而且在分析中必不可少的。对于数学家来讲，更细致地研究奇形怪状的点集实在没有多大意思。无疑，这也影响他们对

于集合论的兴趣。但是，世纪之交一些数学家还是继承康托尔的研究方向，更深入地研究点集结构，这不仅导致一般拓扑学、测度论以及描述集合论的产生，而且特殊的点集，比如头一个康托尔集，正好是当前分形与分维的热门话题，它们现在有着难以想象到的应用。

回到直线的点集，从集合论角度来看，它只有一个不变量，也就是点集的势或基数。依据势的大小，点集可分成三类：

（1）有限点集。

（2）可数（无穷）点集。

（3）不可数点集或者说具有连续统势 c 的点集。

对于它们，我们都可以选离散拓扑，也就是每个子集均为开集，从而也均为闭集。康托尔集的发现，表明存在与区间不同的具有连续统势 c 的离散点集，这就使得点集可以相当复杂。康托尔集虽然具有连续统的势，但是，它的测度（长度）为 0，这是与有限区间不一样的地方。因此，比较集合的“大小”的两个量——势与测度，对于研究康托尔类的集合均不适用。这就导致法国数学家拜尔放弃测度的定量的研究方式而系统地从定性的或“拓扑的”方式研究点集。他于 1899 年引进拜尔函数类，即从连续函数出发，通过极限运算，经过超穷归纳得到一系列函数，这就是所谓半连续函数或拜尔函数类。这时他引进重要概念“纲”（直译为范畴 *Cat gory*）来刻画点集的不同。拓扑空间 X 的子集 A 称为在 X 中稠密，如 A 在 X 中的闭包 $\overline{A}=X$。如果 X 中没有非空开集包含在 $\overline{A}$ 中，则称 A 在 X 无处稠密，也就是 X 中无处稠密集闭包的内部为空集。显然无处稠密集的子集，有限多无处稠密集的并集以及其

闭包均为无处稠密集。于是拜尔给出 X 的子集 A 为第一纲集的定义，他称 A 为 X 的第一纲集，如果 A 可以表为 X 中可数多个无处稠密子集的并集。非第一纲集称为第二纲集。其他数学家也有定义第一纲集的补集为第二纲集的。第一纲集也称为贫（*meager*）集或薄（*thin*）集，是一个极为有用的概念。直线 R 上典型的第一纲集是有理数集，而实数的任何一个区间都不是第一纲集。直线 R 上任何第一纲集的补集是稠密集。在 1899 年论文中，拜尔证明重要的定理：

拜尔纲定理 R 上任何稠密开集的序列的交集也是稠密集。

第一纲集同无处稠密集性质相近，但并不完全一样：

(1) 第一纲集的子集也是第一纲集。

(2) 可数个第一纲集的并集也是第一纲集。

但第一纲集的闭包一般不一定是第一纲集。实数线上子集 A 的闭包是第一纲集当且仅当 A 是无处稠密集。

一个集合类如果具有第一纲集的封闭性质称为 σ 理想，也就是这个集合类也包含其中集合的可数并和它们的子集。

σ 理想的例子有：

(1) 第一纲集合类。

(2) 可数集合类。

(3) 零测度集合类。

由于任何可数集合既是第一纲，又是零测度，因此第一纲集合类和零测度集合类都包含可数集合类为其真子类。因为不可数集合——康托尔集合是第一纲集合也是零测度集合。

现在的问题是第一纲集合是不是和零测度集合很相像，其中一个集合类包含另一个集合类。答案恰巧相反，这两个概念

从某种意义上来讲是互补的。直观上讲，零测度集合可以说处处是"孔"，而第一纲集合可以有孔，也可以没有孔，但也不是连成一片的区间，而是中间有稠密的间隙。对此我们有一个重要定理：

定理 数直线（或它的任何子集合）都可以分解成两个互补的集合 A 和 B 的并，其中 A 是第一纲集合，B 是零测度集合。

这样，我们得出与势及测度均不同的纲来衡量集合的大小，这三种度量都是极为重要的。在数学定理中要证明许多存在定理，存在定理证明之后，进一步要讨论计数问题，也就是具有某种性质的对象到底有多少。在许多情形下，可能是有限多，这就要证明有限性定理。同样可能不是有限多，也就是无穷多，这时要证明它是否可数无穷多还是不可数无穷多。如果是后者，测度和纲的作用就显示出来了，特别是对于连续性的对象，其作用是不可少的。

最简单的例子还是实数直线或者实数集合。康托尔在集合论创立之初，就研究代数数和超越数的集合。康托尔证明超越数的存在定理是通过下面两个定理：

(1) 实代数数集合是可数集合。

(2) 实数集合是不可数集合。

康托尔的这个证明是间接的，实际上他一个超越数也没有举出来，就断言超越数有无穷多，而且是不可数无穷多。这种方法与传统的方法大相径庭。第一个证明超越数存在的是法国数学家刘维尔，他的确造出一系列无理数 Z 具有如下的性质：对每个正整数 n，存在正整数 p 和 q，使得

$$|Z-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^n},\qquad q>1。$$

例如 $Z=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}$ 是一个刘维尔数（取 $q=10^{n!}$）。

现在要知道刘维尔数的集合 L 的“大小”：

（1）刘维尔数有不可数无穷多。

（2）刘维尔数的集合 L 的测度为零。

（3）刘维尔数的集合的补集 L 是第一纲集。

因此，刘维尔数的集合 L 在测度意义下很小，而从“纲度”来看却很大，而且 L 和 L' 构成 R 的一个分解。

测度是长度、面积和体积概念的精密化及推广。各民族数学发展一开始均致力于测量长度和面积，得出相应的公式及方法，而统一的求积方法一直到牛顿和莱布尼茨建立微积分之后才得到。这时求积问题变成一个特殊的积分问题。但积分是一个相当复杂的概念，19 世纪由于分析的严格化才导致由柯西、黎曼及达布相继改进的黎曼积分的概念，最后确定下来。

随着康托尔点集论的建立，要求对更一般的点集的“大小”进行比较及量度，这要求定义测度。先是对黎曼可积性条件中函数的不连续点集的“测度”给出定义。最早是哈那克（Harnack, Axel, 1851—1888）、杜布瓦－瑞芒、史托尔茨（Stolz, Otto, 1842—1905）及康托尔在 1881 年到 1885 年试着做出定义，他们均采用覆盖区间长度的下确界，但是这样定义有毛病。例如，两个无公共点集的并集的“测度”有时能够小于两集的“测度”之和，除了上述定义的“外”测度之外，最先定义“内”测度的是皮亚诺，他在 1887 年定义“可测”集为内、外测度相等，这样虽然克服上述困难，但有界开集并不一定可测。若尔当在他的《分析教程》第一卷第二版

(1893) 中也做了类似的定义，同样也有类似的毛病。对这些毛病的补救来自波莱尔，他在《函数论教程》中大大改进了以前的测度观念，利用可数可加性对任一有界开集构造地定义测度。

波莱尔最终落实在定义著名的波莱尔集合上，这是现在仍然常用的概念。它是由数直线 R 上的开区间和闭区间出发，经过不超过可数次并和交的运算得到的集合。波莱尔集类关于补运算是封闭的。

零阶波莱尔集——开集和闭集。

一阶波莱尔集——F_σ（闭集的可数和）和 G_σ（开集可数交）。

二阶波莱尔集——$F_{\sigma\sigma}$（F_σ 型集合的可数交集），

$G_{\sigma\sigma}$（G_σ 型集合的可数并集）。

…

这样我们可以构造得到高阶的波莱尔集合，它们上面都可以定义测度满足一些明显的条件。

波莱尔在他的《函数论教程》的 46～48 页上指出定义一般集合的测度应服从的"公理"：

(1) 测度总应非负。

(2) 有限多个（相互不重叠的）集合的并集的测度等于各集合测度的和。

(3) 两个集合（一个集合及其子集）的差集等于它的测度的差。

(4) 任何测度不为零的集合是不可数集合。

由 (2) 可知，(4) 等价于：由单点构成的集合测度为零。

显然，这些条件反映出长度的本质特征，从而这成为后来

研究测度论的指导思想。

但是以前测度论有明显缺点，例如有理数集合是不可测的，因此，波莱尔利用康托尔的结果：任一开集是一族可数个两两不相交开区间的并集合，采用有可数个区间覆盖开集的方法，从而令开集的测度为构成区间的长度总和。如此定义的测度，满足可数可加性，在这种意义下可测的集合称为波莱尔可测的。

波莱尔可测集 B 构成 σ 环或称 σ 代数，也就是

(1) $\varnothing$，$X\in B$；

(2) 若 $A\in B$，则 $X/A\in B$；

(3) 若 $A_k\in B$ ($k=1, 2, \cdots$)，则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\in B$。

不过由于存在若尔当可测集不是波莱尔集。这是波莱尔测度的一大缺陷，这使他无法进一步开展积分理论。

这正好成为勒贝格测度观念的出发点，而真正把波莱尔的方法同皮亚诺—若尔当的办法结合而形成系统测度论的则是波莱尔的学生勒贝格，这些发表在他的博士论文《积分、长度、面积》当中。

勒贝格这样定义他的测度：对于实数直线上的点构成的每有界集 E 都对应一个非负数 mE，称为 E 的测度，满足下列条件：

(1) 两全同集合具有相同的测度。

(2)（可数可加性）有限多个或可数多两两不相交集合的和集的测度等于这些集的测度之和。

(3) 由 (0, 1) 区间所有点构成的集合的测度等于 1。

勒贝格通过具体构造定义它的集合 E 的测度：设 $E\subset$

$[a, b]$，用可数多个开区间 $\{I_i\}$ 来覆盖 E。他定义

$$m^*(E)=\inf\{\sum_i|I_i|\mid\bigcup_i I_i\supset E\}$$

为 E 的外测度，其中 $|I_i|$ 表示开区间 I_i 的长度。$\inf$ 表示所有 $\sum_i I_i$ 的下确界。如果 $m^*(E)$ 存在且满足

$$m^*(E)+m^*([a, b]/E)=b-a,$$

则称集合 E 为可测的，即 E 为勒贝格可测集。

显然：

①如果 $A\subseteq B$，则 $m^*(A)\leqslant m^*(B)$；

②$m^*\varnothing=0$；

③设 $\{A_n|n=1, 2, \cdots\}\subseteq P(R)$，则

$$m^*(\bigcup A_n)\leqslant\Sigma m^*(A_n);$$

④如 A 为可数集合，则 $m^*(A)=0$；

⑤设 $A\subseteq R$，对于任 $\varepsilon>0$，存在开集 U，使得

$$A\subseteq U$$

且 $$m^*(U)\leqslant m^*(A)+\varepsilon;$$

⑥设 $A\subseteq R$，则存在 G_σ 集合 G，使得

$$A\subseteq G,$$

且 $$m^*(A)\subset m^*(G)。$$

因此

①如果 $m^*(A)=0$，则 A 是勒贝格可测集。

②如果 A_1，A_2 可测，则 $A_1\cup A_2$ 也可测。

凡波莱尔可测集均为勒贝格可测，且勒贝格测度相等。勒贝格可测集的类比波莱尔可测集的类广泛得多。波莱尔集的类有连续统基数 c，而勒贝格可测集的类的基数为 2^c。尽管如此，勒贝格可测集与波莱尔集相差不多，只差一个测度为0的

集合。确切来讲，对于每个勒贝格可测集 A，存在波莱尔集 B 和测度为 0 的勒贝格可测集 E，使得 $A = B \cup E$，$B \cap E = \emptyset$ 且 $m(A) = m(B)$。

实数直线 R 上勒贝格可测集合 $M(R)$ 构成 σ 环。它包含所有波莱尔可测集 $B(R)$（也构成 σ 环）。勒贝格测度进而可推广到 R^n 上。

勒贝格定义测度，主要目的是为了定义勒贝格积分，以开展实函数理论的研究。这里从另外一条研究路线考虑，研究一般测度问题，即更一般空间上的测度，例如泛函分析中一些线性拓扑空间。这一条路线还有许多问题与数理逻辑有关。

测度问题。1904 年勒贝格提出测度问题：在 R 的所有子集族 $B(R)$ 上是否存在非平凡的可数可加集函数 $m(X)$，它满足：

(1) 平移不变性，即 $m(X) = m(X + a)$，a 为一实常数。

(2) 对于区间 $I = (a, b)$，$mI = b - a$。

意大利数学家维塔利（Vitali，Giuseppe，1875—1932）否定地解决这个问题，他举出反例表明存在勒贝格不可测的集合，为此，他应用选择公理。

对于不可测集，我们有如下定理，表明用可测集逼近它很困难：

定理 设 $E \subseteq R$ 为不可测集，则存在 $\epsilon > 0$，使得如果 $E \subseteq A$，$R/E \subseteq B$，且 A 和 B 均可测，则 $m(A \cap B) \geqslant \epsilon$。

微积分的基本定理是微分和积分互为逆运算，也就是说如果

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则导数 $F'(x)$ 存在，而且等于 $f(x)$，至少在 f 光滑的点是如此。但是 1881 年沃尔泰拉（Volterra，Vito，1860—

1940）还在比萨大学做学生时，发现一个例子：一个函数 F 在(0，1)区间上定义有界，其导数 $f=F'$ 处处存在，但是在当时流行的积分——黎曼可积的意义是不可积的。因此，需要定义一种积分，它可以在更广的一类函数上定义，而且使微分和积分成为互逆的运算。另外对这种积分还希望收敛级数可以逐项积分。勒贝格 1902 年在他的学位论文中迈出新的一步，他定义勒贝格积分与以前定义积分的方式不同，以前是先定义积分，然后由积分得到"测度"，勒贝格与此相反，他先定义测度，然后定义积分。他定义积分时，不去把自变量的区间加以区分，而把因变量 y 的区间（对于实函数来说是 R 的子集）加以重分（成有限个区间），再仿照通常的办法定义积分，这样就可以使一些很坏的函数也成为勒贝格可积的，最明显的例子就是狄利克雷函数。这样，大大扩充了可积函数的范围。另外如果勒贝格可积函数同时也黎曼可积，则两个积分相等，并且与一些极限运算可以交换，而且可以推广到高维。

勒贝格积分虽然能解决沃尔泰拉原来的问题，但并不足够一般以至能够使所有具有有限导数 $f(x)=F'(x)$ 的函数 $F(x)$ 的导数 $f(x)=F'(x)$ 都可积。为此，法国数学家当日瓦（Denjoy，Arnaud，1884—1974）在 1912 年和德国数学家佩隆（Perron，Oscar，1880—1975）在 1914 年分别设计了以他们各自的姓定义的积分。其后鲁金给出描述性定义，这三者是等价的。

5.4 希尔伯特空间

希尔伯特空间是泛函分析中最早也是比较简单的研究对象。一方面，它具有通常三维欧氏空间的许多性质，从某种意

义上来讲，它只不过是有限维向量空间向无穷维的简单推广。另一方面，希尔伯特空间也为更一般的空间的研究提供了一个样板。更一般的空间如巴拿赫空间缺少了希尔伯特空间许多几何性质，简单地说，一般巴拿赫空间也是无穷维向量空间，但是，向量只有长度的概念，而没有两向量之间交角的概念。这样一来，巴拿赫空间就没有两向量垂直或正交等概念，而希尔伯特空间有了这些概念，就有了正交投影、正交分解等几何与分析中常用的概念和方法，它们的作用是非常巨大的。

希尔伯特空间的产生也为理论超前应用树立了一个范例。实际上引导到希尔伯特空间的实际例子可追溯到18世纪。丹尼尔·伯努利（Bernoulli, Daniel, 1700—1784）在研究弦振动问题时，用 n 个质点的力学系统来简化连续的弦，考虑 n 个质点系统的振动，实际上是求线性变换的本征值问题，然后令 $n\to\infty$，求出弦的本征振动的频率。同时，伯努利由物理现象，弦振动发出的声音由基音和许多泛音合成，自然想到弦的形状也由不同泛音相应的正弦曲线叠加而成。实际上，正是这样他发现了对于线性数学至关重要的"叠加原理"，而这才是"线性"最为本质的特征。不过，历史总是在走弯路，当时的物理学和数学并不刻意区分比较简单的线性数学和远为复杂的非线性数学，因此有关的代数和分析一直到20世纪20年代才逐渐明确起来，这得感谢量子力学的诞生，而量子力学也才把希尔伯特空间过晚地正式命名。

第二步是法国数学家付立叶迈出的。在19世纪初年，付立叶研究热传导，再次想到热通过正弦曲线传播，传导棒上各点的温度为各正弦曲线的叠加。他的物理模型并不对头，在当时他还是位"热素论"者，不过他的方法开创了一个辉煌的业

绩。付立叶展开、三角级数、付立叶变换、付立叶积分、付立叶分析等等对 19 世纪和 20 世纪的影响是怎么强调也不过分的。它不仅是一种极为有效的分析方法，而且为数学理论的发展提供了场所，从黎曼积分到勒贝格积分，乃至康托尔的集合论，出发点都是付立叶分析。而对希尔伯特空间理论，它第一次提出了一个函数的正交展开，只是 100 年后才由希尔伯特看到了它的几何学。

付立叶展开为正交展开提供了一个样板，以后的发展只不过是把 $\sin x$ 和 $\cos x$ 换成更复杂的函数。这个过程在整个 19 世纪连绵不断，形成正交展开及正交多项式等分析领域。其中法国数学家斯特姆和刘维尔的工作，他们在 1836 年首先引入常微分方程本征值问题，得出正交函数系一般结果，也就是正交函数系无非是本征函数系。

其后，到 19 世纪末、20 世纪初则是希尔伯特和他的学生把这一套理论系统化了。实际上，理论的来源有两个：一个是无穷维线性方程组的求解，一个是线性积分方程，特别是瑞典数学家弗瑞德霍姆（Fredholm，Ivac，1866—1927）的理论，他特别看到这两种方程的类似性。

1856 年白尔（Beer，A.）在研究位势理论的边值问题引入第二类线性积分方程

$$x(s)-\int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt=y(s), \tag{1}$$

它与线性代数方程

$$x_l-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n}k_{lm}x_m=y_l,\quad 1\leqslant l,\ m\leqslant n, \tag{2}$$

从形式上看何其相似，正好这时，瑞典数学家科赫为解无穷多变元线性方程组而发展了无穷阶行列式，于是他的同胞弗瑞德

霍姆在1898年取得博士学位后，开始研究积分方程（1），弗瑞德霍姆看清（1）与（2）的相似性，他直接用行列式解积分方程，把（1）的解表为两式的商，完全类似于解（2）时的克莱姆（Cramer，Gabriel，1704—1752）法则。

1900年末，希尔伯特在讨论班上听到弗瑞德霍姆的积分方程工作后，立即投入这个领域进行研究。他除了对于由有穷过渡到无穷给予严格的证明外，还着手研究具有对称核

$$k(s, t) = k(t, s),$$

第二种线性积分方程

$$x(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt = y(s), \qquad (3)$$

他把这个问题同二次型通过正交变换化为对角型进行类比，也就是相当于解析几何中二次曲面的主轴问题。这个工作他在1901—1902年度讨论班报告过，首先于1904年发表。他证明基本定理：

$$\int_a^b \int_a^b k(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b x(s)\, x_n(s)\, ds \right)^2,$$

其中 λ_n 是本征值，$x_n(s)$ 是相应本征函数。现在已经明显地看出，可以表示为

$$y(s) = \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt$$

的函数都可以按照本征函数 x_n 展开“付立叶级数”

$$y(s) = \sum a_n x_n(s),$$

其中付立叶系数为

$$a_n = \int_a^b y(s)\, x_n(s)\, ds。$$

在求解积分方程的过程中，$x(s)$ 是连续函数的条件必须扩张为平方可积函数。在同无穷变元代数方程类比中，他也实际

引入 l_2 空间，即平方可和序列空间。他还对这个序列空间引入两种收敛，即强收敛和弱收敛。还证明“选择原理”，即 l_2 空间的单位球体的弱列紧性。

由希尔伯特的工作可以看出，所有希尔伯特空间的要素都已经齐备了。不过，希尔伯特使用的都是经典数学语言，并应用于具体的问题。真正抽象的工作是他的学生辈做的，他们给出了更接近现代的抽象理论。

1906 年希尔伯特指导的博士生施密特在博士论文中把希尔伯特的思想用欧几里得空间的几何语言来表述，引入范数和三角不等式，特别是引进正交化方法，把“付立叶展开”看成在空间中正交分解，从而经典的许多繁复的步骤都可以用简单的统一方法来处理，而且这种办法极为直观。这时希尔伯特空间真可谓呼之欲出了。

希尔伯特空间所需的完备性的观念当时已由胡尔维茨 (Hurwitz, Adolf, 1859—1919) 引入，而且通过

$$x_n = \int_a^b x(s)\, x_n(s)\, ds,$$

平方可积函数空间 $\{x(s)\}$ 与平方可和序列空间 $\{(x_1, x_2, \cdots)\}$ 通过一组完备的标准正交基 $x_1(s), x_2(s), \cdots$ 对应起来。

1907 年弗瑞歇和 F·黎斯也提到平方可积函数空间也有类似的几何。几个月后，德国数学家费舍尔和 F·黎斯独立证明 l_2 与 L_2 作为“希尔伯特空间”是同构的。当时规定的空间都满足“可分性”假定，这个假定只有到 1934 年左右才由 F·黎斯等人去掉。

一直到 1929 年，由于量子力学的发展与当时抽象代数学的潮流，冯·诺伊曼第一次给出希尔伯特空间的公理定义。可是希尔伯特本人却对他的学生们大谈特谈的希尔伯特空间不知

所云。冯·诺伊曼抽象出 l_2 空间及 L_2 空间的共同性质，得出希尔伯特空间 H 的公理：

$H1$　H 是复数域 C 上（线性）向量空间，即在 H 上定义加法和数乘法，使得如果 f_1，$f_2 \in H$，a_1，$a_2 \in C$，则 $a_1f_1 + a_2f_2 \in H$。

$H2$　H 上存在内积，即 $H \times H$ 上的复值函数 (f, g)，满足如下条件：

(1) $(af, g) = a(f, g)$。

(2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$。

(3) $(f, g) = \overline{(g, f)}$。

(4) $(f, f) \geqslant 0$。

(5) $(f, f) = 0$　当且仅当 $f = 0$。

若 $(f, g) = 0$，则称 f 与 g 正交。

$H3$　由 (f, f) 定义 H 的一个范数，$\| f \| = \sqrt{(f, f)}$。由范数定义 H 中度量 $d(f, g) = \| f - g \|$ $\| f - g \|$，H 对于此度量是可分的，即在 H 中存在可数稠密集。

$H4$　对每一正整数 n，H 内均存在 n 个线性无关的元素。

$H5$　H 是完备的。

前面讲过，现在可分性条件可以去掉。最典型的希尔伯特空间为 l_2 和 L_2，l_2 的内积定义为：当 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，它们满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty,$$

则

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n。$$

对于 S 上平方可积函数 x，y，L_2 的内积定义为：

$$(x(s),\ y(s)) = \int_s x(s)\ \overline{y(s)}\mathrm{d}\mu(s)。$$

希尔伯特空间 H 由于有正交的观念，可以引进正交子空间观念：对于 H 的任何闭线性子空间 M，都存在正交补空间 N，使得

$$H = M \oplus N,$$

即 H 中任何元素 x 可分解为

$$x = y + z,\ y \in M,\ z \in N。$$

在 H 中存在标准正交系 A，A 中任何向量的范数均等于 1，任何两个向量均正交。如 H 中不存在与 A 中所有向量均正交的向量，则 A 称为完备的，此时对任何 $x \in H$，均有

$$x = \sum_{y \in A} (x,\ y)\ y。$$

由于 A 是完备的，有帕塞瓦尔（Parseval，Marc Antoine，1755—1836）等式成立

$$\| x \|^2 = \sum_{y \in A} \| (x,\ y) \|^2。$$

希尔伯特的所有完备标准正交基的基数都相同，它称为希尔伯特空间的维数。两个希尔伯特空间称为同构，如果它们的元素一一对应，且保持线性运算的内积。希尔伯特空间基本的结构定理就是：

两个希尔伯特空间同构当且仅当它们的维数相等。

如此看来，希尔伯特空间的结构理论比较简单，特别是常用的平方可和序列空间 l_2 和平方可积函数空间 L_2 都是可数维空间，它们是可数维希尔伯特空间的典型代表。而且可数维是希尔伯特空间可分的充分且必要条件。

希尔伯特空间是巴拿赫空间的特例。巴拿赫空间不具有内

积，因此结构远为复杂。例如巴拿赫空间不一定有基。一个巴拿赫空间是希尔伯特空间的充分必要条件是平行四边形恒等式成立，即

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\ (\|x\|^2+\|y\|^2)。$$

只要巴拿赫空间满足这个等式，则以

$$(x,\ y)\ =\frac{1}{4}\ (\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$$

为内积，它自动成为希尔伯特空间。

作为巴拿赫空间，希尔伯特的共轭空间，即由所有线性泛函构成的线性空间 H^* 也非常简单。首先希尔伯特空间 H 上的任何线性泛函 f 均可唯一表为

$$f\ (x)\ =\ (x,\ x^*),$$

其中 $x^*\in H$，且 $\|f\|=\|x^*\|$，而且 H^* 与原空间 H 等距反同构，即对应

$$f\leftrightarrow x^*$$

是等距的、可加的，且 $\alpha f\leftrightarrow\bar{\alpha}x^*$。由此，希尔伯特空间是自反的。

5.5 巴拿赫空间

巴拿赫空间是完备的赋范线性空间，它包括希尔伯特空间为其特例，而属于一般的拓扑向量空间的范畴。在 20 世纪上半叶，巴拿赫空间在泛函分析中占有中心地位。其后，它也是更一般空间研究的出发点。希尔伯特空间的结构比较简单，而巴拿赫空间的结构则远为复杂多样。20 世纪 70 年代起，研究巴拿赫空间的几何成为一个热门的学科，取得了许多新成果。到 90 年代，许多巴拿赫时代提出的经典问题得到出乎意料的

解决。

1. 定义

由于巴拿赫空间是赋范线性空间，因此，它同时具有线性空间的代数结构，还有用范数定义的拓扑结构，而且这两种结构自然地协调在一起。

对于巴拿赫空间，一般基域 F 取为实数域 R 或复数域 C，对于其它域需要另做处理。由于它的作用主要是分析，我们也只满足在 R 和 C 中考虑问题。

范数是欧氏空间中向量长度的推广，对于域 F（R 或 C）上的向量空间 X 中每个元素 x，定义实数 $\|x\|$ 与之对应，满足下列三个条件：

(1) $\|x\| \geqslant 0$;

$\|x\| = 0$，当且仅当 $x = 0$。

(2) 对于 $\alpha \in F$,

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$。

(3)（三角不等式）

$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$。

这样定义的 $\|x\|$ 称为 x 的范数（*norm*），定义范数的线性空间称为赋范线性空间，简称赋范空间。

任何赋范空间均可通过范数引进自然的度量

$$\rho(x, y) = \|x - y\|。$$

按照这个度量在赋范空间上引入拓扑结构，成为度量空间。如果这个度量空间 X 在这个度量之下是完备的，则称 X 为巴拿赫空间。

巴拿赫空间 X 的闭线性子空间 Y 也是巴拿赫空间。商空间 X/Y 在适当赋范后也是巴拿赫空间。

2. 实例

数学分析中常见的许多函数空间大都是巴拿赫空间。

(1) $C[a, b]$，即定义在实数区间 $[a, b]$ 上所有连续函数 $x(t)$ 的空间，其范数为

$$\| x \| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | x(t) |,$$

即 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上所取的极大值。

这个定义可推广到 R^n 或 C^n 的紧集 K 上，K 上所有连续函数 $x(t)$，也定义同样范数

$$\| x \| = \max_{x \in K} | x(t) |,$$

这也形成巴拿赫空间 $C(K)$。

(2) $C_n[a, b]$ 是定义在实数区间 $[a, b]$ 上所有 n 阶连续可微函数 $x(t)$ 所构成的空间，其范数可定义为

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x^{(k)}(t) |。$$

同样可推广到 R^n 或 C^n 的紧集 K 上。

(3) $L_p[a, b]$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，是 p 次勒贝格可积的函数空间，其范数为

$$\| x \| = \left(\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}。$$

此外，有界可测函数空间 M，开圆盘 D 上解析、在闭圆盘 $\overline{D}$ 上连续的函数空间 $A(D)$，概周期函数空间等函数空间 AP 适当赋范后均为巴拿赫空间。常见的索保列夫（Sobolev）空间也是巴拿赫空间。

除了函数空间之外，数列空间，例如 p 次可和函数空间 l_p，有界数列空间 M，收敛数列空间 C 等均可适当赋范而成为巴拿赫空间。

3. 对偶空间

巴拿赫空间承袭了有限维线性空间的一些基本的性质，其中特别推广了两个重要的概念：

线性映射（线性变换）→线性算子。

线性型（线性函数）→线性泛函。

由线性空间 X 的线性子空间 $D(T)$ 到线性空间 Y 的映射 T 满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

$\alpha,\ \beta\in F,\ x,\ y\in D(T)$ 时，称为线性算子。如 $X,\ Y$ 均为赋范空间时，线性算子 T 称为连续，如果

$$\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in D(T)}}\|Tx\|<\infty,$$

特别当 $D(T)=x$ 时，线性算子 T 连续等价于 $\|Tx\|$ 在 $\|x\|\leqslant 1$ 上有界。这时称 T 为 x 上有界线性算子，并定义

$$\|T\|=\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|$$

为 T 的范数。

如果 T 的值域为域 K 的子集时，就称 T 为线性泛函。在赋范空间 X 上定义的所有连续线性泛函 f，按照线性运算和范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|$$

形成巴拿赫空间 X'，X' 称为 X 的对偶空间。

X 的对偶空间 X' 还可以继续生成它的对偶空间 X''，可以证明：存在一个等度量同构 ϕ，把 X 映到 X'' 的闭子空间上。

这时可把 X 同 ϕX 看成相同，因此得出两个系列

$$X\subseteq X''\subseteq X''''\subseteq\cdots$$

$$X'\subseteq X'''\subseteq\cdots$$

当 $X=X''$ 时，我们称 X 为自反空间。

自反空间的判据：X 是自反的，当且仅当对于每个 $f\in$

x'，都存在 $x \in X$，使得

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|, \quad x \neq 0。$$

另一个自反空间的判据是埃伯莱因（Eberlein, William Frederick, 1917—）—施姆连（Shmul'yan, Vitold, 1914—1944）定理：

X 是自反的，当且仅当 X 的每个依范数有界的点列 $\{X_n\}$，都含有一个弱收敛子序列。

例如 L_p 空间，$p>1$，都是自反空间。L_p 空间的对偶空间是 L_q，p 与 q 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1。$$

因此，L_q 空间的对偶空间是 L_p，同样 l_p 空间也是自反空间。但巴拿赫空间 L_1，l_1，C，M，AP 等都不是自反空间。

4. 巴拿赫空间的一些基本定理

(1) **哈恩—巴拿赫定理** 巴拿赫空间 X 的子空间 Y 上定义的连续线性泛函，可以延拓到整个空间 X 上，而且保持其线性性及连续性。特别是延拓后的泛函具有相同的范数。

它的推广是马祖尔定理。

马祖尔定理 巴拿赫空间 X 的闭凸集 M(若 $x, y \in M$，则当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时，$\alpha x + (1-\alpha) y \in M$)为平衡集(若 $|\alpha| \leqslant 1$，$x \in M$，则 $\alpha x \in M$)，则对于 M 外一点 x_0，存在 $f_0(x_0) > 1$，且

$$\sup_{x \in M} |f_0(x)| \leqslant 1。$$

哈恩—巴拿赫定理的名称来源于 1927 年哈恩对巴拿赫空间的证明，1929 年巴拿赫发表他自己的证明，并且写入他的专著《线性算子理论》(1932) 中。他们都是对实巴拿赫空间证明的。据数学史的研究，早在 1912 年，奥地利数学家海莱

(Helly, Eduard, 1884—1943) 已经对 $C[a, b]$ 提出并证明哈恩—巴拿赫定理，而且提出关键的海莱不等式。这个不等式后来在哈恩及巴拿赫的证明中都用到过。1936 年穆莱（Murray, Francis Joseph, 1911—）对 L_p 空间证明哈恩—巴拿赫定理。1938 年波恩布拉斯特（Bohnenblust, Frederic, 1906—）和索布切克（Sobczyk, Andrew）把哈恩—巴拿赫定理推广到复巴拿赫空间。1940 年狄奥东涅首先不用海莱不等式，而用凸性理论证明哈恩—巴拿赫定理，这为向一般的拓扑线性空间的推广开辟了道路。海莱 1912 年的论文，还发现巴拿赫空间第二个基本定理——一致有界性原理。

（2）巴拿赫—斯坦因豪斯（Steinhaus, Hugo, 1887—1972）定理

如果 H 是从巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的一族线性算子，对每 $x\in X$，

$$\sup_{u\in H}\|u(x)\|<\infty,$$

则

$$\sup_{u\in H}\|u\|<\infty,$$

其中 $\|u\|$ 定义为 $\|x\|\leqslant 1$ 上的

$$\sup\|u(x)\|。$$

也就是说，由一族线性算子局部有限可推出它们在单位球体上整体一致有界性。因此它也称为一致有界性原理。

巴拿赫—斯坦因豪斯定理的另一等价形式称为共鸣定理。

1922 年哈恩证明泛函的一致有界性原理，他用的是“滑动驼峰法”（“*gliding hump*” *method*），这个方法在本世纪初 20 多年间不断地被使用，而巴拿赫 1920 年在他的博士论文中对连续线性算子给出证明。1927 年巴拿赫和斯坦因豪斯用萨

克斯（Saks, Stanislaw, 1897—1942）的思想证明一般情形。他们的方法也不用“滑动驼峰法”，而是把拜尔定理 R^n 中可数族稠密开子集的交集也是稠密的推广到完备度量空间上。

(3) **巴拿赫定理和闭图象定理**

巴拿赫的《线性算子理论》中还用拜尔定理证明一个更为深刻的定理：

如果 u 是巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 中的连续线映射，则或者 $u(x)$ 在 Y 中是第一纲集，或者 $u(x)=Y$。

由此推出重要的闭图象定理：

闭图象定理 如果 u 是巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的线性映射，且图象 $\{(x, u(x)) \mid x\in X, u(x)\in Y\}$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，则 u 是连续的。

这是泛函分析中最有力的定理之一，尤其是在偏微分方程论方面。

(4) **开映射定理**

巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的连续线性映射把开集映到开集。

(5) **逆算子定理**

如果一个连续线性算子 T 把巴拿赫空间 X 一一映射到巴拿赫空间 Y，则其逆算子 T^{-1} 也是连续的。

希尔伯特空间和巴拿赫空间是结构数学中的重要对象，但它们还不够一般，因此必需做进一步的推广。常见的推广有弗瑞歇空间、蒙特尔空间、自反空间、桶状空间、局部凸空间等等，它们都可以归入拓扑向量空间的范畴，属于泛函分析研究的范围，泛函分析研究的空间还有黎斯空间核空间以及附有其它结构的空间，这些都是结构数学研究的对象，另外这些空间

之间的映射和算子也是泛函分析的对象，特别是许多函数及算子的集合可赋予更特殊的代数结构，从而形成了函数代数，拓扑代数及算子代数诸领域。特别是算子代数，尤其是 C^* 代数和冯·诺伊曼代数，由于同当前数学前沿领域密切相关而成为现代数学的热门分支。

第二篇　群　　论

本书的第二部分用全书近四分之一的篇幅来探讨群的理论，这主要由于群在结构数学中具有典型的意义。一方面，群在数学中无处不在；另一方面，群也是数学统一性的象征。它既不是“数量关系”，也不是“空间形式”，如果不是数学家经年累月的努力，要想抽象出“群”这种深藏不露的概念是极为困难的。正因为如此，虽然群有着极为实际的背景，对于只具有通常数学知识的人来说，不是感到困惑，就是感到无聊，仿佛研究这种纯而又纯的对象，只不过是一种高级的智力游戏。实际情况与这些人的想法恰恰相反，群的观念在科学技术中也是大有用武之地的。可以说，没有群，许多先进的科学就无法实现。远的不说，没有群，就没有结晶学的晶体分类，也不会有对原子、分子结构的认识和对光谱的解释。核物理和粒子物理更是伴随群论的应用而发展起来。没有群，对于基本粒子相互作用与分类完全不可想象。群的确帮助我们认识自然、了解自然。而群的概念的创造甚至许多应用似乎都应该归功于数学家。一旦像群这样辉煌的概念创造出来，它就显示出无穷无尽的生命力。

诚然，数学家得出过许多抽象概念。为什么群的概念就特别重要？这主要是由于群是一个比较单纯的概念，比较适于抽

象地进行研究。一条直线代表实数集合，看起来很简单，它同时具有代数结构、拓扑结构和序结构，这些结构之间又有复杂的相互关系，很难脱离其具体背景来研究它。另外，它的结构适中，既有丰富的内容，又不像结构很少的集合那样流于空泛，它永远有解决不完的问题。由于它在数学中处于中心地位，它同数学有着方方面面的联系，群论结果往往具有意想不到的应用。这样我们追溯一下群论的历史发展，考查一下它的理论框架，对于结构数学乃至整个数学过去发展的理解势必起着一个示范的作用。

1　群论的历史渊源与理论框架

1.1　群论概念的产生

现在公认群是元素间存在二元运算（例如乘法）满足下列4条公理的集合：

(1)（封闭律）集合中任两个元素的乘积仍属于该集合。

(2)（结合律）乘法满足结合律，即

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)。$$

(3)（幺元律）集合中存在幺元 I，对集合中任意元素 a 满足

$$I\cdot a=a\cdot I=a。$$

(4)（逆元律）对集合中任一元素 a，存在唯一元素 a^{-1}，使得

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=I。$$

对于这种抽象的概念，若不了解其实际背景，还是什么也不知道。而实际上，群的概念长期隐藏在许多对象的背后，其中也包括数学对象——数与形。在数与形之间，形是最直观的，而群的概念则是形的对称性的抽象结果。除了形的直观对称性之外，我们在一些其他对象中也发现一些对称性，其中最典型的就是函数的对称性。对称函数的概念正好是代数方程求解的基础，这样我们得到群的概念分成两步：第一步是由对称

性到具体的群；第二步是由具体的群到抽象群。在我们发现对称性之后，首先要描述对称性。对任何具体的对称性往往有不同的表示方法，这时出现的最主要的问题是：什么是对称性的本质？也就是说，什么是对称性的共性？这就需要对于对称性进行分析，找出刻画对称性的最好方法。在这个过程中，发现对称性都显示某种变换之下的不变性，而找出这些保持某种对象不变的变换，则是描述其对称性的有效方法。把这些变换集中起来，形成集合，这就是群，由于它是由变换组成的，因此它是变换群。

因此，对于具体的群，我们经历这样一条道路：

发现对称性→不变性→保持不变的变换→所有保持不变的变换集合→变换群。

有了具体的变换群之后，我们需要把它加以抽象化。这个抽象化的过程有两步：一是变换群一定有被变换的对象，这个对象要被抛掉、这样就形成纯粹的群。二是具体的变换抽象成抽象的元素，一个变换接着另一个变换抽象成乘法。这样具体的群就变成抽象群，它通过公理来刻画。在抽象群的概念产生之后，我们要开始研究群的结构和分类，也就是群论的主要目标。

值得注意的是，像群这样的抽象数学概念与过去我们碰到的数学对象十分不同，形的概念比较具体，它们的性质也比较直观。即使是抽象的流形，我们也能通过曲线、曲面的想象来理解。对于抽象的性质，甚至拓扑的性质，我们也可以在三维空间中看得见。数的确是数学中最早的、也是最重要的抽象概念，不过，对于我们这个数字化的世界中，数也不那么抽象了。但群这种概念并不能够很容易理解，它要比数与形抽象得

多，而且它是一个集合，元素一般也不是我们熟悉的数。因此，理解它要比理解数与形的数学困难得多。正因为如此，我们有必要弄清楚它的来龙去脉。

1.2 从对称性到群

在我们的日常世界中，对称性无处不在。但是对称性的精确概念，只有在近代才出现。在通常意义下，对称性往往是指匀称、适当的比例、和谐完美。这多少带有主观的色彩，它并非对称性的本义。对称性（*symmetry*）的原义应为同一度量，它反映一个物体各部分的尺度相同。这当然是对称性的本质部分。不过，现代抽象对称性的观念更为深入，它更加从非度量的方面来观察对称性。正如我们很容易看出正三角形不论边长如何，都具有相同的对称性。立方体不论大小，也有相同的对称性。在日常生活或自然科学的研究中，我们会关心它们的度量大小，例如食盐即氯化钠的晶胞大小，但在抽象的研究中，它们是次要的东西。尽管三条边长度相等是正三角形对称性的基础，但是这并不是我们研究的主要目标。由此看来，在对称性的数学研究中，我们完全不考虑“定量”的部分，而只考虑“定性”的部分，好像是从精密数学倒退了一大步。而实际上我们抓住的才是真正的本质东西。

自然界和人工世界中的对称性不胜枚举，它们乍看起来并不一定起眼，也很难说有什么值得研究的东西，不过我们必须由简单到复杂，由直观到非直观，渐渐去接近对称性的奥秘。

外在世界最明显的对称性是左右对称性或镜象对称性，这是一种最容易发现的对称性，在所有古代民族中，都不同程度地认识到这种对称性，这极其明显地表现在人和动物的形体

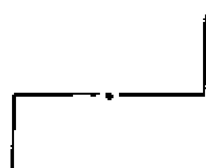
上。然后，人们有意识地把左右对称性用在人工制品中。从建筑、衣饰到纹章图案，很早就出现左右对称性。而且在其后的发展中得到不同程度的遵守，有时甚至出现某种程度的破坏，也就是出现某种对称破缺。最明显的是北京市旧城，在维持基本左右对称性的同时，把西北角砍掉。当然，这都是出于某种信念。在不同的文化中，左与右也出现尊卑乃至善恶之分。在自然界中也发现左右不对称的事例。在弱相互作用中宇称不守恒完全反映左右不对称性。更基本的不对称性是时间反演的不对称性，过去和将来完全不同。生命世界中，构成生命蛋白质的都是左旋氨基酸，显然这涉及到生命的起源问题。

镜象对称性是最直观的对称性，它的特点是有个中心（称为对称中心）或平面（镜面）把两方隔开，彼此互成对映。这在长条的图案中尤为明显，所有图形关于某一点互相对映。如果是人物，这点左边的人向右看，右边的人向左看。可是如果所有的人都向一个方向看，正如许多装饰图案一样，就产生平移对称性。

平移对称性在自然界中也不少见。例如，竹子隔一段有一个节，有些昆虫，如蜈蚣同时有左右对称和平移对称。在一维时间中，等间隔的重复是音乐或诗的节律规则。平移对称性与其它对称性的最大不同之处在于它没有对称要素如对称中心、对称面以及对称轴，因此在历史上是一种常常被忽视的对称性。

在自然界中广泛存在的对称性是转动对称性，表现最多的是花瓣，它有3瓣、4瓣、5瓣、6瓣乃至更多。雪花的六边形使许多人惊叹不已。在装饰中，五角星与佛教的万字饰卍都是转动对称的例子。特别值得注意的是，转动对称性都有一

个对称轴为其对称要素，通常用 C_n 表示转动 $360°/n$ 后仍然保持对称性的对称轴，它也可以表示 C_2 对称性。值得注意的是 C_2 与对称中心或平面所表示的对称性不同，如下图所示：





C_2 转动　　　　　　左右（镜面）对称

当然三维空间中最典型的对称性是结晶体的对称性。虽然人们对美丽的结晶体的对称性早就有所认识，但是晶体的完全分类一直到 19 世纪末才完成。几何结晶学的历史反映出认识对称性的艰难历程，也说明由对称性到群从来没有一蹴而就。在对各种对称性有了直观的认识之后，我们应该开始从理论上对它进行探讨。其实人类历史上从理论上探索对称性早在柏拉图时代已经开始。他在蒂迈欧篇中提出 5 种正多面体，通常称为柏拉图立体。它们是正四面体、立方体、正八面体、正十二面体及正二十面体，而且把它们同 4 种元素对应起来。欧几里得也在他的《几何原本》中更进一步描写这些主体，但没有涉及其几何对称性问题。16 世纪末开普勒更进一步发展了柏拉图的观点。他在 1595 年出版的《宇宙的秘密》一书中更进一步用 5 种立方体来隔开 6 颗行星。他"相信世界上有一种充满整个空间的神灵力量"，宇宙的和谐表现在数学的和谐即对称性当中。

下面我们通过对 5 种正多面体的分析，看何以得出群的概念。

5 种正多面体中最易识别的是正立方体。正立方体有 8 个顶点，12 条棱，6 个面。正立方体的对称要素有：

（1）1个对称中心。

（2）3个过棱中心的反射平面，6个过对角棱的反射平面。

（3）3条过面中心的4重转动轴 C_4；4条过对顶点的3重转动轴 C_3；6条过棱中点的2重转动轴 C_2。

单从对称要素来分析，我们仍然对正立方体的对称性难以有个全面的认识。因此我们再进一步研究一下，它到底有多少对称动作保持正立方体不变，这一步才真正达到群的观念。

为了数一下有多少对称动作，我们先考虑对称轴，除掉不动的对称动作之外，3条4重转动轴有9个对称动作，4条3重转动轴有8个对称动作，6条2重转动轴有6个对称动作。这样共有24个对称动作，它们构成正立方体的转动群。每个动作再加上过原点的反射变换，共有48个对称动作，它们构成正立方体的对称群。可以证明，这48个对称动作包括所有使正立方体不变的对称动作，它们构成一个群，可以称为立方体群，它完整地反映出保持正立方体不变的所有对称性。

对于正四面体，它有4个顶点，6条棱，4个面，其转动轴共有：

（1）4条3重转动轴，共有8个对称动作。

（2）3条2重转动轴，共有3个对称动作。

因此一共有12个元素，构成正四面体的转动群，通常用 T 表示。

正二十面体是最复杂的，它有12个顶点，20个三角形的面和30条棱，在每个顶点处有5个面相交。它的转动轴有6条5重转动轴，产生24个对称动作；10条3重转动轴，产生20个对称动作；15条2重转动轴，产生15个对称动作；加上不动转动，其转动群共有60个元素。

不难看出，正八面体的转动群与立方体的一样，正十二面体转动群与正二十面体的一样。除了正多面体的转动群外，三维（或者二维）的对称群还有循环群 Z_n 及二面体群 D_{2n}。循环群是由平面上绕垂直轴转$\frac{2\pi}{n}$的转动生成，共有 n 个元素。例如，Z_5 有 5 个元素，即绕轴转动$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$和$\frac{10\pi}{5}=2\pi$。如果在 Z_n 上附加一个反射变换就成为D_{2n}，它共有 $2n$ 个元素，它是正 n 边形为底的棱柱形成的对称群。

这样我们得出一些最简单的几何的对称群。

由上所述，从直观的几何对象形成群的概念很不简单，这再一次表现在人们对自然界结晶体的对称性的认识之中。

人们对于自然界中美丽的结晶体早已熟悉，但是描述和分析它们却经历了复杂的历程。

第一步抽象是结晶体都可以看成一个格子在三维方向的无限延伸。这样分类晶体也就变成对格子的分类。分类格子不难，它们由格子的三条棱 a，b，c 与三条棱之间的夹角 α，β，γ 决定，它们称为格子常数。按照格子常数不同，空间格子可以分成 7 个晶系，列表如下：

晶系	$a:b:c$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma$
立方晶系	1:1:1	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$
四方晶系	$1:1:x$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$
正交晶系	$1:x:y$	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$
单斜晶系	$1:x:y$	$\alpha=\gamma=90^\circ$，$\beta\neq90^\circ$
六角晶系	$1:1:x$	$\alpha=\beta=90^\circ$，$\gamma=120^\circ$
菱形晶系	1:1:1	$\alpha=\beta=\gamma\neq90^\circ$
三斜晶系	所有其它情形	

当然这是最粗糙的晶体分类。

第二步是每一种结晶系中的格子还有一些变化，除了上述的单格 P 之外，还存在双格。双格又分为体心格 I 和底心格 A，B，C 两类。I 表示格子中心存在格点，A，B，C 表示在空间格子的一对面上中心存在格点。另外还有面心格 F，它表示空间格子的三对面的中心都存在格点。这样由 7 种晶系存在双格和面心格的情况，进而把 7 种晶系分成 14 种布拉维格，这是由于法国结晶学家布拉维（Bravais，Auguste，1811—1863）在 1848 年得到的。但是近年来科学史研究认为，这方面的研究在 1835 年已由德国结晶学家法兰克斯坦（Frankstein）得出。

14 种布拉维格子为：三斜、六角、菱形都只有 P，单斜 P，C（或 I），四方 P，I，立方 P，I，F，正交 P，A（或 B，C），I，F。

沿着这条路走下去，许多结晶学家和数学家对此进一步分类：

1928 年尼格利（Niggli，Paul，1888—1953）利用爱森斯坦（Eisenstein，Ferdinand Gotthold Max，1823—1852）1851 年关于三元二次型的结果，把空间格分类为 42 种。1932 年苏联数学家狄龙涅（Delone，Bonis，1890—1980）利用塞林（Selling，E. 1834—1920）在 1877 年较简单的约化法，把它分为 24 种，但各格类不能唯一确定。1935 年琼斯（Jones，B. W. 1902—）将它精密化，成功地唯一确定每一格类。这些方法虽然对几何结晶学有所贡献，但离群尚远。

从群论的观点研究结晶学是 19 世纪后期的事。由于结晶学家不了解当时群的概念，因此，他们是在数学家的支持下走

上这条道路的。他们的认识是先从对称要素开始，考虑三维正交群 O（3）的子群，这就是点群。最终由德国数学家舍恩夫里斯得到 32 种点群，也称晶类。其后俄国结晶学家费德洛夫（Feodorov，Evgraf，1853—1919）在 1890 年首先得出空间群 230 种，1891 年舍恩夫里斯也得出相同结果。1894 年巴罗（Barlow，William，1845—1934）独立得出的表不太完备。这样看来，我们从明显的对称形体得出群的概念已经很不简单，从抽象的数学概念出发，当然就更为不易了。

不过群的概念的数学来源却不是这么直观，而且也不是从整数的加法群或（非零）有理数的乘法群来的，这两种最为平淡无奇的群，在 19 世纪几乎没人谈及。为什么？笔者以为主要是因为：

（1）数的集合和它们的结构与传统的数论研究课题没有什么联系。

（2）群的概念的本质，在于其二元运算的非交换性，交换群或阿贝尔群从某种意义上来讲，只是数论和代数的某些直接推广。当时还没有认识到结构问题的重要性。因此，群的概念在数学中是难于产生的。

一般认为，群的来源有三个，数论的、代数的和几何的。

①1801 年高斯在《算术探究》中对整系数二元二次型进行分类，为此他把具有同一判别式的二元二次型按照某种等价关系加以分类，他发现两个不同的等价类经过“合成”可以得到另外一个等价类，换句话说等价类如同数一样，它们之间有某种“乘法”，等价类的集合在这种乘法之下形成一个群，而高斯本人并没有提出群的概念。不过，这是群的概念的算术或数论的来源。

②1770年拉格朗日为了研究代数方程论引进根的置换的概念，其后鲁菲尼及柯西等人发展了置换理论，这是一种对象理论，只有在1846年刘维尔发表了伽罗华的置换群理论，一种研究具体群的理论才正式产生。随着1866年塞尔（Serret, Joseph Alfred, 1819—1885）《高等代数教程》的出版和1870年若尔当的巨著《置换论及代数方程论》的问世，置换群这个具体的群成为群论的主要研究对象。

③19世纪60年代把置换群推广到几何学上产生变换群的概念，特别是运动群。与几何学有关的群与以前的群有很大不同，它们大都是连续变换群，而不是有限群。

因此，它们并不像几何对象如正多面体和结晶体那么直观，而且在过去的几何研究中根本不去考虑，如运动、反射、射影变换等这类几何变换，从而认识它们的重要性，把它们抽象出来是一件极不简单的事。另外，庞加莱在自守函数的研究中发现的一些群也应属于这个范畴。

1.3 从具体群到抽象群

当我们从各种对象中发现对称性之后，就逐步引出具体的群，由于对象千变万化，我们就难以发现它们结构之间的类似之处。因此，我们就需要脱去各种对象表面的外衣，抓住本质的结构，来对它们进行比较，这样我们就从具体的群走向抽象的群。

从历史上讲，这个过程也是相当缓慢的。对于19世纪的数学家来讲，数学的对象还是明确而具体的。过于抽象的概念被认为脱离实际，因此并不容易得到认可。只有到了19世纪末，这种抽象化的结构才逐步成为一种可接受的数学对象。这

个过程有三个步骤：

（1）扬弃：去掉具体的外在的东西。

（2）符号化。

（3）公理化。

历史上具体的群，主要表现在元素是具体的，二元运算是具体的以及依赖于变换的对象。在抽象过程中首先要看哪些可以去掉，哪些应该保留。

最先出现的群是以数为基础的阿贝尔群，它们的运算是通常数的加法或乘法，因此，它们的抽象很简单，只不过把算术变成代数。

高斯的二次型的等价类是第一个非平凡的群的元素，它们的合成也不简单，它们是第一个非平凡的阿贝尔群。后来这个概念推广成为一般的代数数域的类群。但是到 19 世纪对这类有限阿贝尔群才加以符号化和公理化。

群的本质在于它一般是非交换的。这种模式一直到 19 世纪中期发现四元数，特别是矩阵，才对非交换的二元运算有具体的了解。凯雷对于这方面的研究，使他产生对抽象对象符号化的念头。一般认为，1854 年凯雷定义抽象群，但正如费特指出的，他更应说是有了抽象群的想法。因此，笔者认为，他只是把它符号化。所以这么说是因为他认为抽象群由其乘法表示所决定。

凯雷认识的先进之处，在于他对于元素的抽象化，也就是元素不一定是个置换或集合的双射。他只说元素是“运算符号”，而没有讲清楚他们的“运算”到底是什么。他只是明确讲出“一个群是由其符号的合成律所定义”而不是由符号本身的性质。在这点上，戴德金也有同样的看法。1857 年他在讲

义中谈到有限群由一些“对象”构成，它们具有一个合成律，但他没有进一步精确化，也从来没有在他的数论著作中谈到整数构成加法群，非零有理数构成乘法群。这显示即使像戴德金这样抽象代数学的先驱，对于稍稍离开具体对象的抽象也是不去碰的。他们最多也是先走到半路——符号化。

笔者这里强调，符号化只是半抽象化，也就是把元素及二元运算抽象化。最终抽象化必须是公理化乃至最后对结构的研究。

抽象化中还有重要的一步是解决同构问题，也就是什么时候两个群可以看成相同。显然同构是个等价关系。最方便的方法就是找到具体群与它同构，或者说给抽象群一个具体表示。1878年凯雷证明，任何有限群均存在置换表示。因此，到这时候，他的抽象群概念方进了一步，但是仍然不够。

符号化的实现者是克莱因的学生代克（Dyck，Walter，1856—1934），他引入生成元和关系，形成群论的一个主要研究方面。但是，符号化完成的只是表出抽象群，并加以运算。但对公理化以及结构研究仍然有一定距离。

在公理化道路上，首先是克洛耐克1870年在他的论文中明确表达抽象的交换律及结合律。代克在1882年引用凯雷的定义，他认识到同构的群应被当作同一个群，他定义的群不限于有限群，包括有限生成的“离散群”。1883年他还明确要求存在逆元素。而1883年，韦伯才给出第一个抽象群的定义：任何种类的元素 θ_1，θ_2，…，θ_n 的系统 G 称为 n 阶群，如果满足下列条件：

（1）由系统中两个元素，可以通过组合或乘法导出同系统中一个新元素，用符号表示为

$\theta_r\theta_s = \theta_t$。

(2) 结合律

$(\theta_r\theta_s)\ \theta_t = \theta_r\ (\theta_s\theta_t) = \theta_r\theta_s\theta_t$。

(3) 左消去律和右消去律

由 $\theta\theta_r = \theta\theta_s$ 或 $\theta_r\theta = \theta_s\theta$,

可得出 $\theta_r = \theta_s$。

由此可推出系统存在么元并对每元素存在逆元，这个定义的局限性在于假设它为有限群。1893 年韦伯去掉这个限制并写出他的极有影响的著作《代数学教程》第二卷的开头（1896)。1889 年荷尔德也给出类似的定义。正式的公理定义是本世纪初在希尔伯特的《几何学基础》的影响下掀起的公理化热潮中出现的，主要是 1902 年到 1905 年莫尔、韩廷顿及狄克逊等人的论文，其后仍不断有许多研究。

从历史上看，从具体群到抽象群的研究经历了很长时期。到 20 世纪初，有限群和无限群的研究还是分开的。第一步用抽象群统一论述群论的著作是法国数学家德·塞居叶（de Seguier, J. 1862—1935）在 1904 年出版的《抽象群论原理》，其中谈到"抽象群的观念，不依赖于其元素是什么而只考虑群本身。来自代数、分析及几何中的不同特殊的群，许多过去从不同领域的研究组成一个更一般的理论"。这本书预示了结构数学的理论结构，即首先置于康托尔的集合论的基础上，然后通过 4 个公理定义，并通过反例证明其独立性。这本书重点放在有限群上，从无限群开始的抽象群论著是俄国数学家施密特在 1916 年出版的。

这样一来，抽象群变成一个非常抽象的结构了，我们所知道的无非是：

（1）群是抽象元素组成的集合，具体的群的元素可以是数，可以是等价类，可以是置换，可以是几何变换，也可以是任何其它什么，只要它们满足存在二元运算和 4 条公理，在抽象群中它们的具体个性消失了，变成一堆符号。

（2）二元运算也是抽象的，它不是具体群中的数的加法或乘法，或者二次型等价类的合成，或者置换的相继进行，或者变换跟着变换。不管它们来源如何，现在都一视同仁。

（3）我们只能根据 4 条抽象的公理来研究它的结构。对于一般的群，我们不能假定它的元素有限，更不能假定它的元素乘法可交换，我们只能够在 4 条公理之内做文章，因此，要不是群所具有理论上和应用上的重要性的话，谁又会去钻这个牛角尖呢？

1.4 群论的理论框架

有了抽象群的概念之后，它的理论到底研究什么呢？数学家研究这些抽象对象的目标是什么呢？用一句话来概括就是搞清楚它们的结构并加以分类。所谓结构，就是元素（或它们的集合）和元素之间的关系。对于抽象的集合，元素和元素之间除了它们有共同从属于该集合这种共性之外，彼此之间没有关系。一旦有了关系，结构也就产生了。研究结构的主要问题大致有下列几方面：

（1）子结构：群作为一个集合，其某些子集合也是群则称为子群。子群中有一些特殊性质的称为正规子群。

（2）商结构：一个群通过正规子群分解成陪集，这些陪集也构成群则称为商群。

（3）原始结构：一个群如果没有非平凡的真正规子群则称

为单群，单群是构成群的原子，任何群可以看成由单群（原子）构成的分子。

（4）结构扩张：群可以通过一些办法扩张成更大的群。或者说，它是否能嵌入到更大的群中而成为其子群。

（5）结构的同态及同构。

（6）自同构群：一个群到自身上的同构经过复合也是自同构，所有的自同构的集合也构成群。

对于一种结构，搞清楚其子结构、原始结构等等决不是一个简单的问题，对结构的阐明是构成现代数学研究的主要内容。除了上述问题，还要建立许多重要工具，如群表示论，其中涉及许多具体的实例及计算。

但是，对于如此抽象的对象，研究它们的结构并且加以分类是十分困难的，因为太抽象的对象在研究过程中根本无所依傍；因为太一般了，不容易得出很有价值的结果。

因此，在抽象群论的研究过程中，我们往往又回归到具体与特殊的群上面。因为这种群往往给我们一些直观的启发。而对抽象群，我们就毫无办法。同时这种具体化的过程给我们提出重要的工具，这些工具往往使我们能够进行具体计算，得出一些重要的不变量。从而能够进一步刻画和分析我们的对象。

抽象群的具体化有两种：一种是用生成元及关系来表出，可以说是半具体化；一种是用置换群和变换群来表示，这构成表示论。

抽象群的特殊化，就是对所研究群加上一些附加条件，可以较容易地、较详尽地加以研究。加上的条件有多种：

（1）对于集合的基数加以限制，特别是元素为有限多个时，称为有限群。有限群是群论研究最重要的领域，它的许多

成果可推广到一般情形。由于有了有限的条件，出现了许多数值不变量，如群的阶数、元素的阶数，这些又对子群、商群等等构成限制，这就推动整个群论的发展。同样，还有其它有限性条件，例如有限生成群和有限表出群都有许多研究。在无限群中可数群受到特别的注意，连续群中的离散子群近年来也是重要热门。

（2）加上一些附加条件，最典型的是加上元素可交换条件成为交换群，即阿贝尔群。由于有了交换条件，使得结构问题大大简化。不过应该认识到，交换条件与一般非交换差距极大，在许多情形下，交换群都是非交换群的极限情形，许多问题都在交换情形首先获得解决。如结构定理、表示定理、希尔伯特第 5 问题等。

（3）具有其它附加结构，如拓扑结构、流形结构、其它代数结构。这样的群虽然表面上复杂化，实际上由于多种结构不易相容，反而减少不同结构的数量，便于通过运算与其它结构联系起来，这样能够更容易取得成果。

从经典数学的观点来看，结构数学是一个全新的陌生领域。传统数学家对这类问题不知如何下手，也不理解结构数学的结果到底有什么意义。的确，结构数学与经典数学的对象与目标完全不同，经典数论讨论特殊的元素以及每个正整数都可以表示为四个平方数之和，每个偶数（≥6）都可以表示为两个素数之和之类的问题，而代数数论则研究代数数域中代数整数环的理想类群的结构，而理想类群首先是一个集合，而不是这个数或那个数如何如何。显然对象不同、问题不同，结果也不同。正因为如此，研究这些新领域的数学家建立一系列与传统数学迥然不同的领域，它们与传统数学很不相同，但是却给

传统数学极大的推动。例如费尔马大定理的证明，思想全部来自结构数学，而这就是20世纪的数学！

一般的抽象的群论难以下手，我们先从比较具体、比较特殊、比较容易的结构着手，这就是阿贝尔群。

2 阿贝尔群

阿贝尔群也称交换群，是群论中比较简单的一部分，也可看成一般群论的特殊情形。

阿贝尔群在群的 4 条公理之外，还要加上二元运算的可交换性，即对于群 G 的任意两个元素 a，b 满足

$$a \cdot b = b \cdot a。$$

这种可交换性大大简化了群的运算和群的结构。因此，有限阿贝尔群是数学史上第一个得到完全分类的代数结构。更进一步，有限生成的阿贝尔群也已经完全分类。而相应的有限群及有限生成群问题则远未解决。

虽然阿贝尔群比较简单，但在数学中几乎无处不在。拓扑学中的同调群、上同调群、二维及二维以上同伦群（但一维基本群一般并非阿贝尔群）、K 群都是阿贝尔群。同调代数中的同调群及上同调群或它们的衍生物函子以及 K 群等也都是阿贝尔群。代数数论中的理想类群，域的布劳尔群也都是阿贝尔群。当然，阿贝尔群无疑也是群论及环论、域论、抽象调和分析的基础。阿贝尔群中的概念也成为一般群论的概念和结构定理的样板。从某种意义上来讲，阿贝尔群作为整数和有理数加法群的推广，是通常数论的基础，也是“广义数论”的第一步。

尽管如此，阿贝尔群理论并没有就此止步，它仍然是当前一个非常活跃的分支。但是，与群论研究的联系并不那么密切，却同数理逻辑与大基数集合论密切相关。这样继初等数论之后，它成为影响数学基础的最简单的数学对象。

与其它群不同，阿贝尔群的来源可以说是通常整数的加法运算。因此，许多作者为了与一般群的不可交换的乘法相区别，采用加法"+"为其二元运算，从而幺元也表示为0。我们这节也采用这个记号，我们首先考虑有限阿贝尔群和有限生成的阿贝尔群，虽然有些概念和定理也适用于一般情形。

阿贝尔群的例子很多，最典型的是循环群，其中整数加法群 Z^+（通常在没有混淆的情况下也可简写为 Z），是无限循环群。另外，对每个正整数 n 有有限循环群 Z_n，即它由一个生成元 x 生成，满足 $x+\cdots+x=nx=0$，但当 $k<n$ 时，$kx\neq 0$，显然 Z_n 中有 n 个元素

$$\{0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \cdots,\ (n-1)\ x\}。$$

循环群的所有直和都还是阿贝尔群，所谓 Z_m 和 Z_n 的直和 $Z_m\oplus Z_n$，就是由所有元素

$$\{kx+ly\},\ 0\leqslant k\leqslant m-1,\ 0\leqslant l\leqslant n-1,$$

其中 x 为 Z_m 的生成元，y 为 Z_n 的生成元，共有 mn 个元素。最重要的阿贝尔群为素数 p 幂阶群（常称为准素 p 群）、有理数加法群 Q^+ 等。

阿贝尔群中最重要的概念是挠元与挠群。所谓挠元 x 就是，存在一个正整数 n，使得

$$\underbrace{x+\cdots+x}_{n\text{个}}=nx=0。$$

挠元的概念是整数加法群中没有的概念，也表示阿贝尔群的算

术与通常算术不同之处。对于阿贝尔群 G，所有挠元构成 G 的一个子群，称为 G 的挠子群，记作 tG，而且它还是 G 的完全不变子群，这点与非阿贝尔群是不一样的。例如 $GL(2, Q)$ 即有理数元的 2×2 可逆矩阵构成的群中所有挠元不构成其子群。

如果 G 的挠子群 $tG=G$，则 G 称为挠群；如果 G 的挠子群 $tG=\{0\}$，则 G 称为无挠群。由于商群 G/tG 是无挠群，因此，每个阿贝尔群 G 都是一个挠群通过一个无挠群的扩张。但这个扩张不一定分裂，也就是挠群不一定是直和因子。这样，一般阿贝尔群是挠群和非挠群的混合群。当阿贝尔群 G 为有限群或有限生成群时，结构定理比较明显。

1．有限阿贝尔群的结构定理

分解定理　每个有限阿贝尔群是准素 p 群的直和。

这定理可以认为是由高斯在 1801 年证明的，他实际上是证明：如果$(m, n)=1$，即 m, n 互素，则

$$Z_{mn}\cong Z_m\oplus Z_n。$$

因此问题归结为准素 p 群或阿贝尔 p 群的分解问题。

基定理　p^n 阶阿贝尔群可分解为 p 幂阶循环群的直和，即

$$Z_{p^n}=Z_{p^{n_1}}\oplus Z_{p^{n_2}}\oplus\cdots\oplus Z_{p^{n_t}},$$

且 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_t$。这时 $\{n_1, \cdots, n_t\}$ 由 G 唯一确定，称为 G 的初等因子组或型，也有时把 $Z_{p^{n_1}}, \cdots, Z_{p^{n_t}}$ 的生成元称为G 的基。基定理的重要性在于 $\{n_1, \cdots, n_t\}$ 是准素 p 群 G 的全组不变量，即两准素 p 群同构，当且仅当它们具有相同的型。这定理是德国数学家谢林（Schering, Ernst）在 1868 年和克洛耐克在 1870 年各自独立证明的。

把分解定理和基定理合在一起，可得出一般的基定理：每个有限阿贝尔群均为循环群的直和，即

$$G=Z_{m_1}\oplus Z_{m_2}\oplus\cdots\oplus Z_{m_t},$$

其中 $m_2|m_1$，$m_3|m_2$，…，$m_t|m_{t-1}$。$\{m_1, m_2, \cdots, m_t\}$ 称为 G 的不变因子。1878 年弗洛宾尼乌斯和史蒂尔伯格（Stickelberger，Ludwig，1850—1936）最终证明有限阿贝尔群的基本定理：如 G 和 H 是有限阿贝尔群，则 $G\cong H$，当且仅当对于所有素数 p，它们具有相同的型。

由此推出，$G\cong H$ 当且仅当它们具有相同的不变因子。

2. 有限生成阿贝尔群的结构定理

无限阶循环群的直和称为自由阿贝尔群，有限生成的阿贝尔群 G 总可以分解为有限阿贝尔群和自由阿贝尔群的直和。有限部分是 G 的挠子群，自由部分虽然不是唯一确定，但将其分解为无限循环群的直和时，直和因子的数目却是不变的，这称为 G 的秩。因此我们有有限生成阿贝尔群的基本定理：有限生成阿贝尔群同构，当且仅当它们的秩相等且挠子群同构。它也是弗洛宾尼乌斯和史蒂尔伯格在 1879 年证明的。

3. 自由阿贝尔群

上面两类阿贝尔群是最常用的阿贝尔群，它们也可以推广到模论，构成同调代数的基础。其余的，甚至包括最简单的可数阶群也还有许多问题，它们成为当前研究的热点。

阿贝尔群中最简单的是自由阿贝尔群。所谓自由阿贝尔群 F 就是无限循环群的直和，其生成元由 F 一些无穷阶元构成，称为 F 的基。两个自由阿贝尔群同构，当且仅当它们的基的元素数目相等，这数目称为自由阿贝尔群的秩。每自由阿贝尔群 F 的子群 H 也都是自由阿贝尔群且秩（H）$\leqslant$秩（F）。

每个阿贝尔群都是自由阿贝尔群的商群，这样，每个阿贝尔群 G 都可以表为

$$G \cong F/R,$$

其中 F 为具有基 X 的自由群，R 为 F 中由 Δ 生成的子群。其中 Δ 是 X 元素的某些整系数线性组合所构成的元素集，这时我们说 G 具有生成元 X 和关系 Δ，记作 $\langle X|\Delta\rangle$。如果 X 有限，则称 G 是有限生成群，每有限生成的无挠阿贝尔群都是自由群。群的生成元和关系的这个定义，对一般群也适用，而且构成了抽象群的较具体表示，同时它有助于利用生成元及关系构造具有指定性质的群。反过来也存在问题：如何把某一群用生成元及关系表出，并使其简化为最简单的形式。

一个群可以有不同的表出，例如 6 阶循环群

$$Z_6 = \langle x|6x\rangle,$$

同时，　$Z_6 = \langle x,\ y|2x,\ 3y\rangle$。

4．可除群

有理数加法群是无限生成群，它可表示为

$$\langle x_1, \cdots, x_n, \cdots | x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_3, \cdots, x_{n-1} - nx_n, \cdots\rangle。$$

它是抽象可除群的原型。所谓可除群 G 就是对于 G 中任何元素 a 和任何正整数 m，方程 $mx = a$ 在 G 中均有解。

另一类可除群是无穷 p 准素群 $Z(p^{\infty})$，它是普吕弗尔(Prüfer, Heinz, 1896—1933) 在 1923 年引进的，它也具有无穷生成元

$$X = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\}$$

满足关系

$$\{px_0,\ x_0 - px_1,\ x_1 - px_2,\ \cdots,\ x_{n-1} - px_n,\ \cdots\}。$$

$Z(p^{\infty})$ 具有许多有趣的性质：它的所有真子群均为有

限循环群，而且对任何整数 $n \geq 1$，$Z(p^{\infty})$ 具有唯一 p^n 阶子群。实际上可以证明，$Z(p^{\infty})$ 同构于所有 p^n（$n \geq 1$）次单位根构成的乘法群。

可除群在阿贝尔群中具有典型的意义。首先，每个阿贝尔群都可以嵌入在一个可除群当中，它是具有所有阿贝尔群的万有群。其次，如果可除群 D 是某阿贝尔群 G 的子群，则 D 是 G 的直和因子。实际上，反过来也对，如 D 是包含它的任何阿贝尔群的直和因子，则它是可除群。这可以说是可除群的一个刻画定理。

对任何阿贝尔群 G，令 dG 是由它的所有可除子群生成的群，则它是 G 的完全不变子群，而且是 G 的唯一极大可除子群。显然 G 是可除群当且仅当 $dG = G$，反之，若 $dG = 0$，则称 G 为既约群。

因此，对于任意阿贝尔群 G，我们有直和分解定理

$$G = dG \oplus R,$$

其中 R 是既约群。这个分解表明 G 是可除群 dG 通过一个既约群的扩张。它比起挠群 tG 的扩张来，优点在于 dG 总是一个直和因子，而 tG 却不一定。

普吕弗尔在 1923 年还证明了可除群的结构定理：每个可除群均为若干 Q 及若干 $Z(p^{\infty})$（对每个 p）的直和，而且 Q 的分量数和对每个 p 的 $Z(p^{\infty})$ 的分量数一起构成可除群的不变量完全组。

5. 挠群与无挠群

1933 年德国数学家乌尔姆（Ulm, Helmut, 1908—1975）分类所有可数挠群。他引进乌尔姆不变量，它是可数挠群的全组不变量。这定理不能推广到不可数群，不可数阿贝尔群显示

更为复杂的特点。

关于无挠群，可以把秩推广。对于无挠群，任何极大独立子集均有相同基数 ρ（G），它就定义为 G 的秩。整数加群 Z，有理数加群 Q 都是秩 1 的群，而秩 1 的群 G 可由其任何非 0 元素的高度序列的等价类来决定，它们称为 G 的型。反之，对于任何型，都存在一个秩 1 的无挠群具有该型。

对于秩$\geqslant$2 的阿贝尔群，我们还所知甚少。至于群的阶大的情形，除了局部紧拓扑群之外，所知甚少。对于大基数情形，许多问题与数理逻辑有关。

6．局部紧阿贝尔群

下面我们考虑具有连续统的基数的连续群。这样的群很多，典型的有实数加法群 R，一维环面群——即一个圆圈，$T=R/Z$，T 与绝对值等于 1 的乘法群 U（1）同构。同样，n 个 R 的直积 R^n 和 n 个 T 的直积 T^n（n 维环面群）也是连续群。一般来讲，它们都是局部紧拓扑群，也就是其基础空间是局部紧豪斯道夫空间。从拓扑群角度讲，它们的子群如整数加法群 Z 和有限阿贝尔群 F 都是局部紧拓扑阿贝尔群，而且 T 还是紧群。有限个 R、T、Z、F 的乘积 $T^m\times Z^n\times F$ 称为初等阿贝尔群。初等阿贝尔群是交换李群。局部紧阿贝尔群，虽然基数很大，但是拓扑的结构有助于了解其结构。对于局部紧阿贝尔群，1934 年苏联数学家庞特里亚金证明：

结构定理 任一局部紧拓扑群均同构于 R^n 与 N 的直积。其中 N 为一个紧群关于某离散群的扩张。

这样局部紧拓扑群的结构归结为与离散群有关的问题，特别当群 G 为幺元的紧邻域所生成时，则

$$G\cong K\times R^m\times Z^n,$$

其中 K 为 G 的唯一极大紧子群，且 G 是初等阿贝尔群的射影极限。如 G 是李群，则 G 同构于初等阿贝尔群。由此，庞特里亚金还证明著名的对偶定理。

对偶定理 任何局部紧阿贝尔群 G，

$$G \cong CCG,$$

其中 CG 表示 G 的特征标群。

这里的特征标是 G 上取 T 值的连续函数 $\chi(x)$ $(x \in G)$，它满足

$$\chi(xy)=\chi(x)\chi(y), x, y \in G。$$

对于 G 的两个不同特征标 χ，χ'，定义它们的乘积 $\chi\chi'$ 为 $\chi\chi'(x)=\chi(x)\chi'(x)$。这样，在这个乘法之下，$G$ 的特征标全体构成特征标群 $C(G)$，在 $C(G)$ 内引入紧开拓扑之后，$C(G)$ 也成为局部紧阿贝尔群。这样 G 与 $C(G)$ 互成对偶，而且如果 G 是紧群，则 $C(G)$ 是离散群；如 G 是离散群，则 $C(G)$ 是紧群。

阿贝尔群是最单纯的代数结构，对它的研究给我们提供了许多新经验。这些经验有助于我们理解更为复杂的结构。

(1) 每一种抽象结构都涉及一批新概念以及由新概念自然推出的定理。往往由于我们对于这些概念和定理感到陌生，使我们对理解结构数学造成困难。因此，理解结构定理，一定要把主要概念搞清楚。这些概念看起来很多，实际上它们彼此相通，掌握比较基本的，就不难进而掌握全部。作为一个阿贝尔群，最基本的概念是子群、直和（直积）以及生成元和关系。对于一般群，由于不一定交换，概念数目要增加 10 倍以上。

(2) 为了理解这些概念以及结构定理，对一些特殊的具体群要有一定的认识，一般的群往往都是这些特殊的群分解而

来。

(3) 结构数学定理的形态主要是分解定理与刻画定理。分解定理指出它的组分，而刻画定理指出两群同构的充分必要条件，也就是刻画它们的全组不变量是什么。知道了全组不变量之后，分类问题也就不难解决，只需知道不变量取值的限制即可。只有对于特殊的对象，我们才有这种完满的结果。而对于较复杂的对象，我们难得有这样的情况，实际上对于较复杂的情形我们往往还需要进一步化简。实际上即使是阿贝尔群，也仍然有做不完的问题。

3 有限置换群

置换群是最早研究的群，它不是一个抽象的群，但对抽象群的研究具有很重要的启发意义。许多抽象群论的重要结果是首先在置换群中证明的，例如著名的西洛定理。抽象群论发展以后，置换群的研究也并未减弱，这是因为：

第一，每个有限群均有一个置换表示，也就是具体表示为一个置换群，即每个有限群都是对称群 S_n 的子群。

第二，置换群的研究对抽象群的研究有重要作用，许多散在单群就是由它的置换群性质被发现并加以刻划的。

第三，置换群有自己独有的问题，需要在抽象群论之外加以研究解决。

第四，置换群是最简单的变换群，置换群论的许多概念和问题大都可推广到一般的变换群理论上。由于置换群的元素可以非常具体地表现出来，因此，对置换群我们可以有比较具体的认识，并进行实实在在的计算。

3.1 置换群的表示

一个置换群实际上由一个群 G 和它所作用的集合 X 构成。我们只考虑 X 是有限集合的情形。为了明确起见，X 中 n 个对象我们可用 1，2，3，…，n 加以标记。这 n 个对象可以有

$n!$ 种不同的排列方法。从 X 的某一种排列到另一种排列称为 X 的一个 n 次置换，记作 σ，它可以表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma 1 & \sigma 2 & \sigma 3 & \cdots & \sigma n \end{pmatrix},$$

其中 σi 表示在 σ 之下 i 的象。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

表示置换 σ 把 1 变成 2，2 变成 3 等等。两个置换 σ 和 ρ 可以定义乘积 $\sigma\rho$，表示先进行置换 σ，再进行置换 ρ 之后的结果，例如

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}。$$

它是这么得到的：σ 把 1 变成 2，ρ 又把 2 变成 1，如此等等。显然所有 n 次置换满足群的 4 条公理，构成一个群，称为 n 次对称群，用 S_n 表示，S_n 的子群称为 n 次置换群。

上面置换的表示法显然比较清楚，但是写成两行数太麻烦了。在不失一般性的情形下，我们可以写成一行，即轮换的乘积，例如

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

可以写成 (1 2 3) (4 5) (6)，其中 (1 2 3) 表示在置换 σ 之下，1 变成 2，2 变成 3，3 变成 1。这样每个置换就可以写成若干个不相交的轮换之积，而且只含一个元素的轮换表示它变

到自己，一般可以省略，结果就更为简单。例如，上面的 $\sigma\rho = (5, 6)$，而么元写成 1 即可。在这样的约定下，置换的轮换表示是唯一的。

置换还有另外一种表示，即表为只含对换（*transposition*）的乘积。所谓对换，是只含两个元素的轮换。例如 $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)$。虽然一个置换表示为轮换之积可以有不同的方式，但是其中轮换的数目要么都是奇数，要么都是偶数。如果是前者则置换称为奇置换，否则称为偶置换。在 S_n 中，所有偶置换构成 S_n 中$\frac{n!}{2}$阶子群，这个子群称为 n 次交错群或交代群，记作 A_n，它是群论中极为重要的一类群。当 $n \neq 4$ 时，A_n 是单群。因为 $n = 2, 3, 4$ 时，n 次对称群是可解群；而当 $n \geqslant 5$ 时，S_n 不可解。正是这个结果决定了一般五次和五次以上代数方程不存在根式解。

1878 年凯雷证明任何有限群都存在置换表示，也就是它们都是 S_n 的子群。由于它们的置换表示，我们可以把一个抽象群的元素很具体地表示出来，它们之间的关系可以很方便地通过计算反映出来，这大大有利于我们发现其中的结构。另一方面，由于置换群总存在一个被置换的点集，如果我们对这个点集加上一些附加结构，我们就会造出一些新的群。

3.2 置换群的一些基本概念

置换群是变换群最简单的形式，它的一些基本概念很容易推广到一般变换群理论当中，而且起着十分重要的作用。

1．群的作用

群 G 在集合 X 上的作用是指一对一映射

$$\alpha: G\times X \longrightarrow X,$$

$$(g,\ x)\longmapsto (gx),$$

它满足两个条件：

(1) 对每 $x\in X$，$1x=x$，其中 1 表示群的么元；

(2) g，$h\in G$，x，$y\in X$，$g\ (hx)\ =\ (gh)\ x$。

2. 群的置换表示

对于有限群 G，当 X 是有限集合，有 n 个元素时，则由群的作用 α 导出 X 到 X 自身的一个置换

$$x\longmapsto gx。$$

这个置换属于对称群 S_n，这样就产生一个映射

$$\rho: G\longrightarrow S_n。$$

它是一个群同态，称为群 G 的置换表示。换言之，群 G 在 X 上的每个作用产生出 G 在 X 上的一个表示，反之，G 的一个置换表示也对应于在 X 上的一个作用。

在不同的情况下，它们只是同一事情的两种不同的说法。下面的术语可对表示也可对作用来讲：

(1) 次数，即 X 的基数；

(2) 忠实的作用（表示），当 ρ 核 $=\{I\}$，这时，ρ 象与 G 同构。

当把 G 本身作为 X，我们就由 G 到 G 上的作用得到 G 的正则表示，作用

$$G\times G\longrightarrow G,$$

$$(g,\ x)\longmapsto gx,$$

得到 G 的（左）正则表示，由此可知任何有限群都可以表为一个置换群，即 S_n 的子群，这时 $n=|G|$。

3. 轨道

当群 G 作用在 X 上时，$x\in X$ 的轨道就是 X 中的集合 $G_x = \{gx \mid g\in G\}$，我们用 $|Gx|$ 表示它的基数。任何两条轨道 Gx，Gy 或者相重合，或者不相交，因此 X 被 G 的所有轨道分成互不相交的子集。

4．稳定化子

当群 G 作用在 X 上时，使某一 $x\in X$ 保持不变的 G 的元素构成 G 中的子群，称为 x 的稳定化子，用 Gx 表示。它在 G 中指标 $|G:Gx| = |X|$，显然 $gx = hx$ 当且仅当 $Gxg = Gxh$，对所有 g，$h\in G$。

轨道和稳定化子的概念多少是互补的，即对任何 $x\in X$，

$$|Gx| = |G:Gx|,$$

特别 $|Gx||Gx| = |G|$。

5．不动点

当 G 作用于 X 时，$g\in G$ 的不动点是所有 $x\in X$ 使得 $gx = x$。g 的不动点集合记作 Fix（g），由此可得 G 的轨道数目 $\#G$ 为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix\ (g)|。$$

如果群 G 可迁作用在 X 上，只有么元固定所有 X 的点，即每 $x\in X$，$Gx = 1$，则称 G 正则地作用于 X。

3.3　可迁群与 k 重可迁群

可迁群是置换群理论中最重要的组成部分。所谓可迁群，是指群 G 作用在 X 上，使得对任何一对 x，$y\in X$，都存在 $g\in G$，使 $y = gx$。因此，对于可迁群 G，X 只有一条轨道，这时，G 称为可迁地作用于 X 上。对于 X 的任意两组点

$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$，$x_i \in X$，$y_j \in X$，$x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_k$，$y_1 \neq y_2 \neq \cdots \neq y_k$，如果都存在 $g \in G$，使得对每个 i，$y_i = gx_i$，则 G 称为 X 的 k 重可迁群。显然，k 重可迁群也是 $(k-1)$ 重可迁群。更进一步，如果对于任意两组 k 点，只有唯一一个 $g \in G$，把一组 k 点变成另一组 k 点，则 G 称为强 k 重可迁群。当然强 k 重可迁群一定是 k 重可迁群。

可迁群理论最主要的问题是找到并分类所有 k 重可迁群或强 k 重可迁群。这是一个有 150 多年历史的老问题。早在 1830 年，伽罗华就首先得出一个 3 重可迁群。

我们有一些初等结果：

(1) 对称群 S_n 是强 n 重可迁群。

(2) 交错群 A_n 是强 $(n-2)$ 重可迁群。

(3) S_n 是唯一的 n 次的 $(n-1)$ 重可迁群和 $(n-2)$ 重可迁群。

(4) A_n 是唯一的 n 次的 $(n-2)$ 重可迁群。

事实上，如果 G 是 n 次 k 重可迁群，则 $|G|$ 一定被 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 整除，而如果 G 是 n 次强 k 重可迁群，则 $|G| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$。这些条件对大 k 的 k 重可迁群规定了严格的限制。虽然不难找到 2 重、3 重可迁群，4 重、5 重可迁群也早已找到几个，但当 $k \geq 6$ 时，一直到最近仍然没有找到除 S_n 和 A_n 之外的 k 重可迁群。实际上，它们的确不存在，不过证明要靠有限单群的分类定理，这样问题转向 4 重及 5 重可迁群。

1860 年和 1873 年法国数学家马丢发现 5 个特殊的群，按照次数，分别记作 M_{11}，M_{12}，M_{22}，M_{23}，M_{24}，除 M_{23} 外，

都是 4 重可迁群，而 M_{12}，M_{24}是 5 重可迁群。其后，若尔当在 1873 年证明 M_{12}是除 S_5，S_6，A_7 外唯一的强 5 重可迁群，M_{11}是除 S_4，S_5，A_6 外的强 4 重可迁群。他还证明对 $k \geqslant 6$ 只有对称群 S_k，S_{k+1}及交错群 A_{k+2}是强 k 重可迁群。

下面考虑 3 重可迁群和 2 重可迁群，较容易的是分类所有强 3 重可迁群和强 2 重可迁群，已经完全解决。查森浩斯在 1936 年成功地分类所有强 3 重可迁群，它们是两个无穷系列 $PG(2, q)$ 和 $M(p^{2n})$，其中 p 为奇素数。而对于强 2 重可迁群，早在 1905 年狄克逊提出一般造法及 7 个例外情形，1936 年查森浩斯证明，如 p 是素数，$q = p^n$，则每个强 2 重可迁群，除了有限多个例外之外，都可以嵌入在某个 $Aut(1, q)$ 之中，而这就是狄克逊所列举的。最后，1959 年汤姆逊（Thompson, John Griggs, 1932—）把所有强 2 重可迁群作为弗洛宾尼乌斯群予以完全分类。

下面我们稍加详细地解释一下：

除了有明显置换表示的对称群和交错群之外，我们还可以用其它的方式，特别是几何的方式来定义置换群，由于我们考虑的主要是有限置换群，我们用的域都是有限域 F。

1. 仿射群

F 上的所有仿射变换 $t(a, b): \xi \longmapsto a\xi + b (a, b \in F, a \neq 0)$构成 F 的对称群(记作 $Sym(F)$）的一个子群，称为 F 上一维仿射群，记作 $AGL_1(F)$。如果 $|F| = q$，则

$$|AGL_1(F)| = q(q-1)。$$

这时为了清楚起见，我们往往用 $AGL_1(q)$ 来代替 $AGL_1(F)$，高维仿射群实际上是仿射几何的自同构群，d 维仿射几何 $AG_d(F)$ 由向量空间 F^d 的点和仿射子空间构成，点无非

就是 F^d 中的向量，而仿射子空间就是 F^d 向量的平移。仿射空间 AG_d（F）的自同构就是空间中点的置换，它把点映成点，而且把 d 维子空间映成 d 维子空间。这样它具有一个简单的形式，对于每线性变换 $a \in GL_d$（F）和向量 $v \in F^d$，定义仿射变换如下：

$$t(a, v): F^d \longrightarrow F^d,$$

$$u \longmapsto ua + v。$$

这样所有 t（a，v）（$a \in GL_d$（F），$v \in F^d$）形成 d 维仿射群 AGL_d（F）。

2．射影群

对于一维仿射平面即 F 加入一个 ∞ 点后成为一维射影平面 PG_1（F）。把 AGL_1（F）加以扩张成 G，使 G 在 PG_1（F）上可迁，且 $G_\infty = AGL_1$（F）表示。

特殊重要的是射影特殊线性群 PSL（2，F），它是 PGL（2，F）的正规子群，定义为 SL（2，F）$\cdot Z/Z$，其中 SL（2，F）是 GL（2，F）中行列式为 1 的矩阵构成的子群。

3．半线性分式变换群

设 K 为域，$\bar{K} = K \cup \{\infty\}$，$\sigma \in Aut$（$K$），$\xi^\sigma$ 表示 ξ 在 σ 下的象，半线性分式变换为

$$t(a,b,c,d): \xi \longmapsto \frac{a\xi^\sigma + b}{c\xi^\sigma + d}, \xi \in \bar{K}, ad - bc \neq 0。$$

规定

$$\xi \longmapsto \infty, \text{如 } c\xi^\sigma + d = 0;$$

$$\infty \longmapsto \infty, \text{如 } c = 0;$$

$$\infty \longmapsto ac^{-1}, \text{如 } c \neq 0。$$

这些半线性分式线性变换构成群，记作 $\Gamma LF(K)$，当 σ = 恒同自同构，$\Gamma LF(K) \equiv LF(K) = PSL(2, K)$。

当 p 为奇素数，$q=p^{2n}$，σ 为 $F(q)$ 的自同构，且 $\sigma^2=1$，定义 M 为 $\Gamma LF(q)$ 的子群，它由 $S\cup T$ 构成，其中

$$S=\{\xi\longmapsto\frac{a\xi+b}{c\xi+d}\Big|ad-bc=\text{平方}\},$$

$$T=\{\xi\longmapsto\frac{a\xi^\sigma+b}{c\xi^\sigma+d}\Big|ad-bc\neq\text{平方}\}。$$

具体地讲，强 2 重可迁群是类似于仿射变换群，即 $F(q)(q=p^m)$ 的自同构群，由

$$x\longmapsto ax^\sigma+b$$

构成，其中 a,b 是 $F(q)$ 的元素，$a\neq0$。另外有 7 个例外群，次数为 $5^2,7^2,11^2,23^2,29^2,59^2$。

4. 弗洛宾尼乌斯群

弗洛宾尼乌斯群从本世纪初就开始出现，一直是一个重要的研究对象，在有限群论诸多领域中都起着重要作用。

弗洛宾尼乌斯群是一个非正则的可迁置换群，但只有幺元具有一个以上不动点。

1902 年弗洛宾尼乌斯证明有限弗洛宾尼乌斯群的结构定理的第一部分：

有限弗洛宾尼乌斯群的结构定理　设 G 为弗洛宾尼乌斯群，Gx 为一点稳定化子，置

$$K=\{x\in G|g-1,\text{或 }Fix(g)=\emptyset\},$$

则　(1) K 是 G 的子群，且是正规子群，也是正则子群。

(2) 对每素数 p，Gx 的西洛 p 子群是循环群，Gx 的西洛 2 子群或是循环群或是四元群，如 $G2$ 不可解，则它只有一个非阿贝尔的合成因子即 A_5。

(3) K 是一个幂零群。

弗洛宾尼乌斯的证明首次应用他所创立的特征标理论研究群的

结构理论，这是特征标理论的伟大胜利。至今还没有发现不用特征标的初等证明。定理第(2)部分由查森浩斯在1936年证明，最难的一部分由J·G·汤姆逊在1959年证明。

特别当弗洛宾尼乌斯群 G 是2重可迁群时，K 则是一个正则且正规的阿贝尔子群，其中每个非幺元都具有相同的阶。

3.4 2重可迁群的分类

我们现在已可以得到完整的有限2重可迁群的分类。由于任何有限2重可迁群的台或者是初等阿贝尔群或者是本原单群，这表明分类2重可迁群与分类单群有密切关系。许多有限单群将可以在以后见到。

有限2重可迁群共有8个无穷系列和10个例外群，4个熟知的无穷系列是：

(1)交错群 A_n，$n\geqslant 4$。

(2)对称群 S_n，$n\geqslant 2$。

(3)仿射群。

2重可迁可解群在1957年由胡伯特所决定，而2重可迁非可解仿射群到1974年由赫灵所决定。

(4)射影群 $PSL_d(q)$。

其它4个无穷系列为：

(5)辛群 $S_p(2m,2)$，每一个群均有两个不同的2重可迁作用。

(6)酉群 $PGU(3,q)$。

(7)铃木群 $Sz(q)$。

(8)李林学群 $R(q)$。

后面3个系列群都可以2重可迁地作用于适当的史坦纳三元系

上。

10 个例外的 2 重可迁群是马丢群 M_{12}, M_{24}, M_{11}, M_{23}, M_{22}, PSL(2, 11), M_{11}^{+}, A_7^{+}, H·S 与 Co_3。

这里解释一下 M_{11}^{+}和 A_7^{+}。

M_{11}是有限 4 重可迁群, 这里还有一个作用在 12 点上的 3 重可迁作用。M_{24}作用在 24 点上, 可把 24 点集分为两个 12 点集 Δ 及 Γ, 使得 Δ 的稳定化子是马丢群 M_{12}。其中使一点不动的稳定化子同构于 M_{11}, 它 3 重可迁地作用于 Γ 的 12 点上, 此即 M_{11}^{+}。

三维射影空间 $PG_3(2)$有 15 点, 其自同构群为 $PGL_4(2)$, 它同构于 A_8。因此 $PGL_4(2)$有指数为 8 的子群 G 同构于 A_7, 这即 A_7^{+}, 它 2 重可迁地作用于 15 个点上。

可迁群中有重要的一类群称为本原群, 其重要性从下面定理就可以看出:

每 2 重可迁群均为本原群。

若 G 是 X 上可迁群, 现在我们定义 G 的非本原区。X 的一个子集 Y(至少包含两个元素)称为 G 的非本原区, 如对每个置换 $g \in G$, 或者 $gY = Y$, 或者 $gY \cap Y = \emptyset$。如果 G 具有非空的非本原区, 则称 G 为非本原群, 否则称 G 为本原群。例如对称群 S_n 就是本原群。另外素次的置换群均为本原群。

本原性判据　G 为 X 上可迁群, $x \in X$, 则 G 是本原群当且仅当 Gx 是 G 的极大子群。

本原群的重要性质是本原群的非平凡的正规子群也可迁地作用于 X 上。

研究本原群, 一个重要概念是台(*socle*), 一个群中如存在非

平凡的正规子群，则一定有极小正规子群，即它不包含任何其它非平凡正规子群。G 的台就是由 G 的所有极小正规子群生成的群，记作 $SOC(G)$，它是 G 的特征子群。

有限群的每个极小正规子群或者是初等阿贝尔群，或者其中心等于 1。

G 为有限本原群，K 为 G 的一个极小正规子群，则下列三种情况只有一个成立：

(1)对某个素数 p 和某个整数 d，K 为 p^d 阶正则初等阿贝尔群，且 $SOC(G)=K=C_G(K)$。

(2)K 是正则非阿贝尔群，$C_G(K)$是 G 的极小正规子群置换同构于 K，$SOC(G)=K\times C_G(G)$。

(3)K 是非阿贝尔群，$C_G(K)=1$，$SOC(G)=K$。

对于一般有限群，台是一些单群的直积。而对本原群，这些单群全都同构。这样，经过非常困难的过程，奥南(O'Nan, Michael)和斯科特(Scott, William Raymond, 1919—)在 1979 年证明有限本原群的基本定理，但他们的证明中有一些不完全，到 1988 年才补正。

奥南一斯科特定理　G 为 n 次有限本原群，$H=SOC(G)$，则下面两种情形之一成立：

(1)对某素数 p，H 是正则初等阿贝尔 p 群，若 $|H|=n=p^m$，G 同构于仿射群 $AGLm(p)$的一个子群。

(2)H 同构于某非阿贝尔单群 T 的直乘幂 T^m，这时下列情形之一成立：

①$m=1$，G 同构于 $Aut(T)$的一个子群。

②$m\geqslant 2$，G 是“对角型”群，$n=|T|^{m-1}$。

③$m\geqslant 2$，对于 m 的某真因子 d 以及某个本原群 U 具有

$SOC(U) \cong T^d$，则 G 同构于圈积（*Wreath product*）$UOSym(m/d)$，$n = l^m/d$，l 是 U 的次数。

④$m \geqslant 6$，H 正则，$n = |T|^m$。

有限置换群理论是有限群理论的原型。一个多世纪以来，它们交互作用，互相推进。在单群分类完成之后，一系列有限置换群问题获得解决。现在很多问题又回到原始的列举问题上，并成为计算机群论的重要组成部分。我们已经有 1000 次以下所有真本原群的表。回顾一下历史，我们就可以看出我们的进步何等之快。在以前的表里，都存在不同程度的不精确和不完备，不过在此不必一一细说。

n 次本原群的表：

1872 年，若尔当 $n \leqslant 17$；

1897 年，伯恩塞德 $n \leqslant 8$；

1909 年—1929 年，曼宁 $n \leqslant 15$；

1970 年，西姆斯（Sims, Charles, 1937—）$n \leqslant 20$；

1980 年，玻格莫洛夫 $n \leqslant 50$；

1986 年，伊林和塔克曼柯夫 $n \leqslant 1000$；

1988 年，狄克逊和莫梯摩尔 $n \leqslant 1000$。

1980 年以后的进展显然是由于单群分类的完成。单群不仅给计算带来方便，而且对本原群的分类起了指导作用。一句话，我们是通过“台”来分类，具有相同“台”的本原群，我们归入一个军团（*cohort*），再根据“台”的群的类型分成 11 种不同的型，其中 A 到 H 共 8 种型的台都是单群。现在把每种型的军团数列举如下：

型	台	军团数
A	交错群	77

B	$PSL(2,q)$	240
C	$PSL(n,q), n>3$	56
D	酉群	34
E	辛群	28
F	正交群	13
G	其它李型单群	7
H	散在单群	28
I	复合群:乘积作用	74
J	复合群:对角作用	5
K	正则阿贝尔群	190

这里一共是 762 个军团，它们只是真本原群，这些浩浩荡荡的军团真给我们一个威武雄壮的印象，这是群论先驱们无法想象的。正是结构理论使我们找到把这些军团形成整齐队列的钥匙。当然，有限置换群理论仍有许多问题有待解决，但是大的问题已经取得突破。另外，它还开辟了计算机代数的领域，列举问题永远是复杂而麻烦的事。尽管置换群对有限群理论做出巨大贡献，由于它的"作用"，它还有自己许多问题。除此之外，无限置换群理论还方兴未艾，它对无限群论正在起着过去有限置换群所起到的相同的作用。

4 有限群

有限群是抽象群论的核心，也是比较容易具体化的一部分。其中的抽象概念大都可以推广到一般群论当中。因此，我们稍稍多用一些篇幅来解释一下。但是，有限群论最辉煌的成就是单群分类的完成，这一项数学上绝无仅有的大工程，涉及许多专门技术。这里我们只是通过历史来看一下这一步是如何走通的。

历史是一面镜子，有限群论的发展也有许多弯路，其中特别值得一提的是：

(1)有限群论的发展经历：

具体⟶抽象⟶具体

三步曲，其中最后具体是指表示论的发展。

(2)有限群论也经历由列举到结构的过程，最后到单群分类，这也是研究抽象结构的必由之路，列举往往给我们提供经验，其功不可没。

在研究有限抽象群的早期，我们都依靠有限置换群这个工具。但这个工具尽管方便，也的确有它拖泥带水的地方。我们要考虑次数、作用、可迁性等等，而这些在抽象群论中一扫而空。因此在发展抽象群时，我们靠什么呢？实际上，代替有限置换群，我们主要靠有限线性群，也就是以有限域为元素的矩阵群

(后来被E·诺特理解成线性变换群)。从历史上来看,线性群是在置换群的外衣下发展起来的,它产生于若尔当1870年的大著。正像我们在上一章置换群中所讲的射影群及仿射群(后者甚至还没有名称)。它们何时走向前台并成为主角呢?从历史上看,这完全是结构数学的威力。从有限单群的分类理论即可看出18个单群的无限系列中,16个系列都是从线性群产生的,可是线性群的深入研究一直到19世纪末才开始,这是由于

(1)有限域的概念并不成熟。

(2)矩阵并没有一个系统理论。

(3)当时只有极少的对象把人引向线性群。

(4)在19世纪80年代之前,置换群在群的研究中始终占统治地位。从某种意义上讲,这种状况一直延续到20世纪20年代,E·诺特的抽象观点占统治地位为止。

正因为如此,若尔当在他的1870年的大著中考虑的线性群主要是有限域$F(p)$上的矩阵群,为此他采用同余$(\mathrm{mod}\,p)$的形式,矩阵元素都是模p整数。若尔当在书中引入的线性群包括:

(1)一般线性群$GL(n,p)$,由所有$n\times n$可逆矩阵构成。

(2)特殊线性群$SL(n,p)$,由所有$n\times n$行列式为1的矩阵构成。

(3)射影一般线性群$PGL(n,p)$。

(4)射影特殊线性群$PSL(n,p)$。

(5)辛群(若尔当称为阿贝尔群(*groupe abélien*)),它把交错双线性型

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{n+k}-x_{n+k}y_k)$$

变换到自身。

(6)射影辛群 $PSp(2n,p)$。

(7)"史坦纳群",它是仿射变换群,把 $2n$ 变元二次型变到自身(mod2)。

(8)正交群 $O(n,p,Q)$,p 为奇素数,把二次型 Q 变到自身(mod$p$)。

(9)正交群 $O(2n,2,Q)$,它包含在 $Sp(2n,2)$之中,因此若尔当称为次阿贝尔群(*groupes hypoabeliens*)。

在许多情形下,若尔当证明上面的群中大多数群或指数 2 的子群为单群。

1901 年狄克逊发表他的经典著作《线性群兼论述伽罗华域理论》,正如书名所显示的,他建立了有限域理论并把若尔当的工作推进到全部有限域 $F(q)$上($q=p^{\nu}$)。狄克逊的工作成为线性群的第二个里程碑。

线性群特别是典型群的结构和分类工作在 20 世纪 30 年代为范·德·瓦尔登所系统化。狄奥东涅在 40 年代建立漂亮的结构理论。

1955 年薛华荔的经典工作建立了线性群和李代数的关系,开创了有限单群理论的新时代。而对线性群的真正理解,直到代数群理论的建立才趋于成熟。

正是由于 20 世纪 20 年代量子力学的创立,使得线性代数学这个学科应运而生,并成为大学数学的一门基础课。加上抽象群、线性表示理论的成熟,线性群成为研究有限群的一个具体的模式。也正是由于这种历史的弯路,除了个别的成就之外,有限群论的真正高潮出现在 1955 年之后。而在上半个世纪,有限群论实在不能说有太大的进步。经过 1955 年到 1985 年所谓

“30 年战争”，现在的有限群论已经提到惊人的高度，而且在 100 年前那些古老的问题也大都得到顺利的解决。就连原始的列举问题，现在也可以借助计算机大规模地向前推动。有限群论在这么短的时期内完全变貌！

4.1 群的列举

在群论研究的初期，群论的一个中心问题是对于每个整数 n，列举出所有互不同构的所有 n 阶群。实际上，这是一个永远也回答不完的问题，特别是通过手算，连 256 阶、512 阶群的列举都根本难以做到。它反映出在群论的早期发展中一个不正确的导向。这是由于人们对结构概念很模糊，也不能够掌握群中的根本要素，对于一般化的定理难以把握和表述。到了 19 世纪 20 年代，由于抽象代数学的诞生，群论又走向另一条相反的道路，完全研究抽象结构。这条道路虽然取得空前的成功，但仍然难以回答具体的问题。到了十几年前，由于计算机威力的加大以及群论自身及其应用的迫切要求，出现了计算机群论这个崭新领域，对于群的列举及其特征性质（特别是特征标表的计算）有了不少具体结果。

从 19 世纪末起群的列举已经有了不少结果，特别是美国数学家米勒(Miller, G. A. 1863—1951)写了大量论文。除了列举某一阶 n 有多少不同构的群外，还有单群的列举。19 世纪研究较多的则是 d 次一般置换群和特殊置换群的列举。

为了对群的列举有一个具体的认识，我们把 32 阶以下的群的数目，列表如下：

$\|G\|$	群的数目	具体群
2	1	Z_2

3	1	Z_3
4	2	$Z_4, Z_2\times Z_2$
5	1	Z_5
6	2	$Z_6\simeq Z_2\times Z_3, S_3$
7	1	Z_7
8	5	$Z_8, Z_4\times Z_2, Z_2\times Z_2\times Z_2, D_8, Q$
9	2	$Z_9, Z_3\times Z_3$
10	2	Z_{10}, D_{10}
11	1	Z_{11}
12	5	$Z_{12}, Z_6\times Z_2, A_4, D_{12}, T$
13	1	Z_{13}
14	2	Z_{14}, D_{14}
15	1	Z_{15}
16	14	
17	1	
18	5	
19	1	
20	5	
21	2	
22	2	
23	1	
24	15	
25	2	
26	2	
27	5	

28	4
29	1
30	4
31	1
32	51

由这个表可以看出：

(1)$|G|$为素数 p 时，只有一个群，这个群是 p 阶循环群，我们用 Z_p 表示。

(2)$|G|$为素数平方 p^2 时，只有两个阿贝尔群，一个群是 Z_{p^2}，一个群是 $Z_p\times Z_p$。

(3)当$|G|=6$ 时，首次出现非阿贝尔群——对称群 S_3。

(4)当$|G|$为 2 的幂 2^k 或 $2^k\cdot p$ 时，有大量不互相同构的群存在。

这不仅在$|G|$小的时候如此，当$|G|$大时，更是如此。具体来讲：

64($=2^6$)阶群有 267 个，128($=2^7$)阶群有 2328 个，这是 1990 年由詹姆斯(James)得到的。

256($=2^8$)阶群最近才由奥勃莱恩在 1991 年用计算机算出，共有 56092 个。

而 512($=2^9$)阶群的精确数字还不知道，估计超过 800 万(只计算 2 类群)。

除了 512 阶和 768($=3\cdot2^8$)阶两种群之外，1000 以内的所有阶数的有限群共有 174366 个(128 阶的群占了约三分之一)，它们的具体结构也都完全清楚。

(5)对于任意素数 p，不同构的 p^n 群的数目 $\#(p^n)$都相当大。G·希格曼(Higman, Graham, 1917—)在 1960 年和西姆斯

在 1965 年证明当 n 大时，$\#(p^n)$渐近为 $p^{2n^3/27}$。

(6)对于一般 n，1987 年麦克伊伏(McIver, A.)和P·M·诺伊曼(Neumann, P.M.)得出不同构 n 阶群数目 $\#(n)$的上界

$$\#(n)\leqslant n^{\mu^2+\mu+2},$$

其中 μ 为 n 的素因子分解 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}$ 中指数 $e_1,\cdots,e_n$ 中最大的数。可见 $\#(n)$的数目一般同高次幂有关。另外这个结果并不是很容易得到的，它用到有限单群分类的结果。实际上，它涉及同一阶数的单群的数目最多为 2 个。

4.2 群的基本结构

一个抽象群，只由 4 个公理来定义，是一个非常纯粹、非常简单的对象。它可以成为研究结构数学的样板。这样的对象，漂亮是漂亮，研究起来却没有什么依靠。实际上，任何一个对象，如果同其他事物都不关联，我们很难对它说些什么。因此，我们在研究抽象对象的过程中，往往又需要把它们加以具体化，变成我们比较熟悉的东西，这样我们对它们的性质就比较容易掌握一些。

对于一般抽象群，我们有两层结构：一是构成群的集合的结构，一是群的结构。对于集合来说，有元素属于集合，以及各种子集合，此外最重要的是基数。对于群来讲，我们有元素间的运算——乘法，以及各种子群及其它衍生的结构，其中最重要的是：

1. 子群

群 G 的子集合 H，如满足下列两条件，称为 G 的子群，记作 $H<G$：

(1)若 $x, y \in H$,则 $xy \in H$;

(2)若 $x \in H$,则 $x^{-1} \in H$。

由定义可知,G 的子群 H 与 G 具有相同的乘法运算与相同的么元,G 中只含么元的群和 G 本身是 G 的平凡子群,与 G 不同的子群 H 称为真子群。关于 G 的子群最主要的定理是 G 的子群的交仍是 G 的子群。

2. 正规子群

定义 G 中集合 S, T 的乘积为

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\},$$

$$S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\},$$

如 $S, T, U \subseteq G$,则有

$$(ST)U = S(TU),$$

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}。$$

一般来讲,$S < G$, $T < G$, ST 未必是 G 的子群,我们有 $ST < G$ 的充要条件是 $ST = TS$。

对于一个元素集合 $\{s\}$, $\{u\}$,我们简记

$$\{s\}T, T\{u\}, \{s\}T\{u\}$$

为 $\qquad sT, \qquad Tu, \qquad sTu$。

特别重要的是当 $x \in G$; $S \subseteq G$ 时,xSx^{-1} 称为 S 的共轭集。

G 的子群 H 称为 G 的正规子群,如对任何 $x \in G$,有

$$xHx^{-1} = H,$$

记作 $H \triangleleft G$。如果一个群 G 没有任何非平凡的正规子群(即单位群和 G 本身),则称为单群。单群是群论中最重要的一类群,它的作用相当于素数在数论中的作用。

3. S 的正规化子

$S \subseteq G$, S 在 G 中的正规化子为

$$N_G(S)=\{x\in G \mid xSx^{-1}=S\},$$

显然 $N_G(S)$是 G 的子群。

4．S 的中心化子

S 的中心化子也就是 G 中所有与 S 中每个元素均可交换的元素构成的群，记作 C_G（S），即

$$C_G(S)=\{x\in G \mid sx=xs, \forall s\in S\}。$$

显然

$$C_G(s)\lhd N_G(s)。$$

5．剩余类

若 H 是 G 的子群，则对于任何 x，$y\in G$，

$$x^{-1}y\in H。$$

在 G 中元素建立一个等价关系 $x\sim y$，G 中包含所有与 x 等价的元素的集合 xH 称为含 x 的左剩余类。事实上，我们可以把 G 按照等价类分解为不同左剩余类的并

$$G=\bigsqcup_{t\in T}tH，\quad tH\cap t'H=\emptyset，\quad t\neq t',$$

T 称为 H 的左剩余类的代表系。同样用

$$y^{-1}x\in H$$

可以定义右剩余类。特别当 N 是 G 的正规子群时，N 的左剩余类与右剩余类一致。这个等价关系的商集合构成一个群，称为商群，记作 G/N，其阶为$|G|/|N|$。

对于子群，有如下的一些定理：

第一同构定理 若 f 是 G 到 G' 的同态，N' 是 G' 的正规子群，则

$$N=f^{-1}(N')$$

是 G 的正规子群，且

$G/N \simeq G'/N'$。

第二同构定理 若 $H<G$，$N \lhd G$，则

$$HN/N \simeq H/H \cap N。$$

以上的定义和定理对所有抽象群都适用。但是从逻辑上，越抽象越一般，我们就越少能讲出普遍性结果。因此，要想知道比较丰富的内容，我们还需要具体化一些。

群论中最重要的概念是同态，同态是保持群结构的映射，若 G，H 为群，则映射

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

称为同态，如果对所有 x，$y \in G$，

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)。$$

显然，一个同态总把么元映到么元，把互逆元素映成互逆元素。同态 φ 引出两个群，一个是同态 φ 下 G 的象，记作 $Im\varphi$，一个是 H 的么元在 φ 下的原象，也就是 G 中所有映到 H 的么元的元素，称为 φ 的核，记作 $Ker\varphi$。如果 $Ker\varphi=\{1\}$，则称 φ 为单同态；如果 $Im\varphi=H$，则称 φ 为满同态。如果 φ 既为单同态又是满同态，则称 φ 为同构。如果两群之间存在一个同构，则称两者同构，它们在结构研究中就可以看成一样的东西。如果 H 也同构于 G，则同态 φ 自然称为 G 的自同态，同构 φ 称为 G 的自同构。G 的所有自同构也构成一个群，称为 G 的自同构群，记作 $AutG$。由 G 元素的所有共轭生成的自同构群，称为内自同构群，记作 $InnG$。

在群 G 的诸多子群中，除了正规子群之外，还有另外一些重要的子群。

(1) 特征子群。当 H 是 G 的子群，φ 是 G 的自同构时，φ 把 H 映到一个子群 φ（H）之上。如果 φ（H）$=H$，则称

H 是由 φ 所固定的子群。如果每一个 $\varphi \in AutG$ 都固定 H，则称 H 是 G 的特征子群，显然 H 也是 G 的正规子群，因为正规子群无非是被所有 $\varphi \in InnG$ 所固定的子群。

（2）换位子群。对于群 G 中两个元素 a，b，$aba^{-1}b^{-1}$ 称为 a，b 的换位子，记作 $[a, b]$。显然，它反映 a，b 的可交换性质。对于一般的群论来讲，两元素一般不可交换，也就是 $aba^{-1}b^{-1} \neq 1$。在这种情况下，a，b 可交换是比较特殊的情形，这时 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = 1$，$G$ 中所有元素均可交换，即 G 是交换群，这是群论中非常平凡的情形，这时 G 中没有 1 之外的换位子。因此群中换位子的数目多少反映它同交换群的差距或不可交换性的程度。但是 G 中所有换位子的集合并不构成一个子群，因为两个换位子的乘积不一定是一个换位子，不过换位子的逆元的确是一个换位子。我们用 G 中所有换位子生成的子群，称为 G 的换位子子群，简称换位子群，也称为导出群，用 G' 或 $[G, G]$ 表示。G 的换位子群 G' 是 G 的正规子群，显然商群 G/G' 是交换群。其实我们有更为一般的结果：如 $H \lhd G$，商群 G/H 是交换群当且仅当 $G' \leqslant H$。

（3）极大子群。这是一个集合论结构的概念。如果一个子群除 G 以外不包含在任何其它子群之中，称为极大子群。除了素数阶循环群之外，G 中一般存在真子群，当然就存在极大子群。往往极大子群不止一个，那么它们的集合论的交也是一个子群，称为弗拉蒂尼（Frattini，Giovanni，1852—1925）子群，记作 $\Phi(G)$，它是 G 的一个特征子群，因此也是正规子群。而且弗拉蒂尼在 1885 年证明，$\Phi(G)$ 还是幂零群。弗拉蒂尼子群有如下性质：

①如 $N \lhd G$，$H \leqslant G$，且 $N \leqslant \Phi(H)$，则 $N \leqslant \Phi(G)$。

②如 $N\lhd G$，则 $\Phi(N)\leqslant\Phi(G)$。

利用弗拉蒂尼子群可证明维兰德定理，它是幂零群的一个刻画。

维兰德定理 G 为有限幂零群当且仅当 $G'\leqslant\Phi(G)$。

任何结构定理都意味着分解。对于群来讲，最基本的分解是直（接）积。两群 G_1 和 G_2 的直积 $G_1\times G_2$ 的元素由 (g_1, g_2) 构成，其中 $g_1\in G_1$，$g_2\in G_2$，它们的乘法为

$$(g_1, g_2)\times(h_1, h_2)=(g_1h_1, g_2h_2)。$$

在这种乘法之下，它是一个群，其么元为 $(1, 1)$。

G 称为其正规子群 N 和子群 H 的半直积，如果 $G=NH$，且 $N\cap H=\{1\}$，记作 $N\rtimes H$。最典型的例子是二面体群 $D_{2n}\simeq Z_n\rtimes Z_2$，而且如 s，t 是 D_{2n} 中 2 阶元，则 D_{2n} 由 s、t 生成，且 $\langle s, t\rangle=\langle st\rangle\rtimes\langle s\rangle$。

4.3 算术结构

有限群就是在抽象群的条件中加上群的元素的数目为有限这个条件。表面上这个条件不起眼，可是有了这个条件，产生出有限群论极其丰富的内容。

实际上，一谈有限群，就是在每一个群加上一个表现它的特征的数——群的阶，也就是群 G 中元素的数目，记作 $|G|$。由于它是一个正整数，一般群论所没有的算术性质，在有限群论中就很突出，并且起着重要的作用。这些涉及整数的结构，维兰德称为算术结构。属于算术结构的除了群的阶 $|G|$ 之外，还有元素的阶以及 p 群、西洛 p 群等。首先由于群的元素数目有限，所以每个元素的阶也有限。设 $x\neq1$，x^2，x^3，…不能无限制地延续下去，到一定程度，

$$x^m = 1,$$

满足这方程的最小的 m 称为元素 x 的阶，记作 $|x|$。

关于有限群的算术结构，我们有如下的基本定理：

1. 拉格朗日定理

每一群 G 的子群 H，一定满足 $|H|$ 整除 $|G|$。

实际上，早期研究置换群的大数学家们都知道这个定理。$|G|/|H|$ 称为子群 H 在 G 中的指数，对此我们有庞加莱定理：群 G 的每个有限指数 m 的子群都包含 G 的有限指数 n 的正规子群，n 满足 $m|n$，$n|m!$。虽然这些定理十分简单，但它引出大量的信息，也提出一系列的问题：

(1) 子群是群结构最重要的组成部分，子群的数目比起子集来要少得多，而且与 $|G|$ 的素因子数目有关，对于 $|G|$ 为素数 p 的群，没有真子群。

(2) 虽然子群的阶是 $|G|$ 的因子，但是并非对 $|G|$ 的所有因子 h，都存在 h 阶子群。另外还有这种情况，如果存在 h 阶子群，非常可能有互不同构的多个 h 阶子群。例如交错群 A_5 是第一个非平凡单群，$|A_5| = 60$，它没有阶数为 15，20，30 的子群，因为比如说如果存在 15 阶子群，它的指数为 4，按照庞加莱定理，它应该包含一个指数 n 的正规子群，$n|24$，$4|n$（满足这两条件的有 $n = 4$，8，12，24），而这是不可能的。

(3) 群的阶数是有限群最基本的不变量。若两个群 G，G' 同构，则 $|G| = |G'|$，因此，如果 $|G| \neq |G'|$，这两个群肯定不同构。但是，逆定理一般不成立，即两个群阶数相等，群未必同构，这样就产生有限群论最早的一个基本问题：给定正整数 n，有多少互不同构的 n 阶群？

2. 若尔当—荷尔德定理

对于正整数，我们有算术基本定理，即唯一因子分解定理：每个正整数 $n>1$，可唯一表示为素数幂的乘积

$$n=p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdots p_m^{e_m},$$

其中 p_1，…，p_m 是不同的素数，e_1，e_2，…，e_m 是正整数。为了同群论的定理对比，我们把它表述成下列等价的形式：

对于 $n>1$，存在一个整数序列

$$n=n_0>n_1>n_2>\cdots>n_r=1,$$

其中每个 n_i/n_{i+1} 为素数，如果不考虑先后次序，这些素数的集合（素数以及它们的重数）唯一由 n 决定。当然，n 的表示序列可以不同。基本定理表示：(1) 素数是正整数乘法的“原子”或者“积木块”；(2) 所有正整数都可由这些原子或积木块唯一地表示出来。

若尔当—荷尔德定理就是有限群中对应的算术基本定理，只是上面的素数换成单群，整数序列换成正规子群序列。

若尔当—荷尔德定理 对于每个有限群 G，存在一个子群序列，

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright G_2\triangleright\cdots\triangleright G_r=\{1\},$$

其中每个 G_{i+1} 都是前面的群 G_i 的正规子群，而且每个商群 G_i/G_{i+1} 都是单群。

这样得到的单商群的集合是由 G 唯一决定的，这些单商群称为合成因子。

不过若尔当—荷尔德定理并不能称为有限群的基本定理，这是因为，虽然 G 唯一决定单（商）群的集合，但是反过来，给定一系列单商群，由这些合成因子所决定的群一般不止一个。例如 3 次对称群 S_3 与 6 阶循环群 Z_6，这两个不同构群的

合成因子都是 Z_3 和 Z_2。

这样一来，有限群论的研究分成两大块：

（1）定出所有有限单群，决定它们的结构。

（2）每个有限群是如何由这些单群结合而成的。

因此，我们把有限群分成两类，一类是单群，一类是可解群。对它们的研究是不太一样的。当然也有许多定理是一般有限群所共有的，最主要的是西洛定理。

3．西洛定理

西洛是挪威数学家，是李的老师。他是最早研究置换群论的数学家之一。通过置换群，他证明群的算术结构的一个重要定理：

西洛定理 设 p 为素数，$|G|=p^a\cdot n$，$p\nmid n$，则

（1）G 至少有一个 p^a 阶子群，这个子群称为 G 的西洛 p 子群，简记作 S_p（G）。

（2）如果存在两个或两个以上西洛 p 子群，则它们必定相互共轭。

（3）G 的西洛 p 子群数目满足 $\# S_p(G)\equiv 1 \pmod p$，即或是 1 个，或是 $p+1$ 个，或是 $2p+1$ 个等等，而且 $\# S_p(G)$ 还整除 $|G|$。

（4）如果 $p^{r+1}\mid |G|$，则 G 中一定存在 p^r 阶子群，且这个子群一定包含在某个 p^{r+1} 阶子群之中。

实际上早在 1845 年，柯西已证明：如果 $p\mid |G|$，则 G 包含 p 阶子群。由此可推出，如果 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant a$，则 G 存在 p^i 阶子群和 p^j 阶子群，且每 p^i 阶子群一定包含在某个 p^j 阶子群之中。

西洛定理有一个推论，即如果对某一个素数 p，只存在唯

一西洛子群，则这西洛 p 子群是正规子群，反之亦然。

4. p 群及其他特殊阶的群

对于有限群，除了群的阶数之外，每个元素的阶数当然也是有限的，它们也给出群一定的限制条件。如果一个群，每个元素的阶均为素数 p 的幂，则称它为 p 群。有限 p 群在有限群论的研究中占有极其重要的地位，我们有它的刻画定理：

有限群 G 是 p 群，当且仅当 $|G|$ 是 p 的幂。

若 G 是一有限 p 群，则其中心 $C(G)$ 决不只包含幺元一个元素，更确切地讲，p 整除 $|C(G)|$。由此可知，如果有限 p 群是单群，则 G 一定是 p 阶循环群，这也是单群中仅有的交换群系列。

更进一步，有限 p 群的每个极大子群都是正规子群，其指数为 p。

有限 p 群，特别是有限 2 群，往往十分复杂。在低幂情形，我们有

$|G|=p$，G 是循环群；

$|G|=p^2$，G 是阿贝尔群；

$|G|=p^3$，G 是超特殊群（*extra - special group*），超特殊群在单群理论中起着极为重要的作用。

对于一般的 n，p^n 阶群均为幂零群，当然更是可解群了。

1893 年荷尔德研究了所有 p^3，p^4 阶的群，而且推向阶具有 2，3 个素因子的群如 pq^2，pqr 阶群的研究，证明它们都是可解群。

1904 年伯恩塞德证明了重要的算术结构的定理：

伯恩塞德定理 任何 p^aq^b 阶的群均为可解群。

这个结果可以说是最佳的，因为存在 p^2qr 阶群不是可解

群，最简单的例子为交错群 A_5，它的阶数为 $60=2^2\cdot3\cdot5$。至此，通过群的阶数来刻画群的结构到达了极限。要想进一步研究群的结构，还要采取更为有力的方法，特别是纯群论的，如正规结构等方法以及表示论的方法。伯恩塞德正是用特征标的方法完成他的证明。到这时候，他和其他群论专家才信服表示论的威力。

伯恩塞德定理一个大规模的推广一直到20世纪60年代才由费特和汤姆逊完成，他们证明，奇数阶群均为可解群。由此看出，有限群论中的复杂性大都来自阶中2的幂部分。

4.4 有限幂零群和可解群

1. 有限幂零群

幂零群是介乎可解群与 p 群之间的对象，它的理论比较完整，可以当作我们研究其他类型的有限群以及进行推广的一个样板。

(1) 定义

一群称为幂零，如果它具有一个中心列。所谓中心列，就是一个正规子群列

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_k=\{1\},$$

不仅每个 G_i 是 G_{i-1} 的正规子群，而且它也是 G 的正规子群，同时对于每个 i，G_{i-1}/G_i 还包含在 G/G_i 的中心之中。

G 的最短中心列的长度称为 G 的幂零类，0类幂零群就是平凡群 $\{1\}$，1类幂零群是阿贝尔群，可见幂零群是阿贝尔群的推广。p 群即阶为素数 p 的幂的群是最重要的幂零群，它们是构成幂零群的原子。由定义可知幂零群一定是可解群，但可解群未必是幂零群。最简单的例子是对称群 S_3，它是可解

群而非幂零群。由于非平凡的有限幂零群 G 的中心一定 $\neq \{1\}$，而 C (S_3) $=1$。

(2) 初等性质

①设 G 为有限幂零群，G 的每个子群也是幂零群，且如果 G 是 c 类幂零群，则 H 为 $\leqslant c$ 类的幂零群。

②G 为 c 类幂零群，$H \lhd G$，则商群 G/H 是 $\leqslant c$ 类幂零群。

③G 为 c 类幂零群，则 G/CG 为 $c-1$ 类幂零群。

④P·浩尔（Hall，Philip，1904—1982）证明：如 G 为任一有限群，$H \lhd G$，则其换位子群 $H' \lhd G$。如 H 及 G/H' 均幂零，则 G 幂零。

更简单的是，如 $H < C$ (G)，且 G/H 是幂零群，则 G 是幂零群。

但是如 $H \lhd G$，H 和 G/H 均为幂零群，则 G 未必是幂零群。一个简单的反例仍是 S_3，它不是幂零群，但 $A_3 \simeq Z_3$，与 $S_3/A_3 \simeq Z_2$ 均为阿贝尔群，当然是幂零群。

⑤如 G 是幂零群，$H \lhd G$ $(H \neq \{1\})$，则 $H \cap C$ (G) $\neq 1$。

⑥如 A 是 G 的极大阿贝尔正规子群，则 $A = C_G$ (A)。

(3) 刻画定理

有限群 G 的下面 4 个性质每个都是 G 是幂零群的充分且必要条件：

①G 的每个子群都是亚正规子群（*subnormal subgroup*）。子群 H 称为亚正规子群，如果存在正规子群列，使得

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd G,$$

其中每 H_i 均不同。

②G 满足正规化子条件，即 G 的每个真子群 H 均包含在它的中心化子 N_G（H）之中。

③G 的每一极大子群均为正规子群。

④（维兰德定理）$G' \leqslant \Phi$（G）。

（4）结构定理

任何幂零群 G，G 为其西洛子群的直积，也就是 G 是 p 群的直积。反过来，如 G 为其西洛子群的直积，则 G 是幂零群。

2．有限可解群

群 G 称为可解，如存在一系列 G 的子群

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = \{1\},$$

其中对于每个 i，G_i 是 G 的正规子群且 G_{i-1}/G_i 是阿贝尔群。有限可解群的两个基本结果是西洛定理和浩尔定理。

西洛定理　对于 $|G| = p^a m$，$p \nmid m$，G 中存在 p^a 阶子群称为西洛 p 子群，它具有唯一共轭类，且对于所有 $i + 1 \leqslant a$，每 p^i 阶子群都包含于某一个 p^{i+1} 阶子群之中。

1928 年浩尔对于可解群大大推广西洛定理，即把素数 p 推广到一组素数 $\pi = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，我们称正整数 n 是 π 数。如果它的所有素因子 $\in \pi$，称 m 为 π' 数，如果它的素因子 $\notin \pi$，显然每有限群 G 的阶 $|G|$ 都可以分解因子为 nm，其中 n 是 π 数，m 是 π' 数。G 的子群 H 称为 π 子群，如 $|H| \mid n$，而 G 的 n 阶子群称为浩尔 π 子群。

1928 年，浩尔证明：如果 G 是有限可解群，则

①G 存在浩尔 π 子群；

②所有浩尔 π 子群形成单一的共轭类；

③任何 π 子群包含于某一个浩尔 π 子群之中。

换言之，浩尔证明对于有限可解群 G，拉格朗日定理的逆定理成立，也就是如有限可解群 G 的阶 $|G|=ab$，$(a, b)=1$，则 G 一定存在 a 阶子群，而这对单群乃至更一般有限群不成立。更重要的是，浩尔在1937年证明这个性质刻画有限可解群，即刻画定理：如果一个有限群 G，对于任何素数集合（当然只是和整除 $|G|$ 的那些素数有关系），浩尔 π 子群存在，则 G 是可解群。

下一个重要结果是1961年卡特（Carter）发现所谓卡特子群，即可解群的自正规化的幂零子群。

从这时起，两个重要的概念对有限可解群的研究有重要作用：一个是形成类（*formation*），它是德国数学家伽绪茨（Gaschütz，Wolfgang，1920—）在1963年引入的，一个是它的对偶费廷类。

对于像群这类代数结构，我们考虑某一个群的结构，在研究过程中，我们再一次像研究结构时一样，来一次"集合化"，也就是把具有某些性质的群集合起来，形成一个类或者一个簇（*variety*）。对于有限群来说，我们称为形成类。当然我们不是随便把一堆东西放在一起，类中的群一定要满足一些条件，这些条件对于以后的结构研究起着重要作用。

一个有限群的类 F 称为一个形成类，属于它的群称为 F 群，如果：

①F 群的同态象是 F 群。

②如果 G/N_1 和 G/N_2 是 F 群，则 $G/N_1 \cap N_2$ 也是 F 群。

但是一般它在形成子群上并不封闭。形成类的例子有：有限群类，有限可解群类，有限幂零群类，有限超可解群类等

(超可解群是介乎幂零群和可解群之间的群，它是可解群，再要求正规列中每个 G_i 都是 G 的正规子群且 G_{i-1}/G_i 是循环群。胡伯特证明有限超可解群的主要定理：如有限群 G 的任何极大子群均具有素指数，则它是超可解群。由此可推出如 $G/\Phi(G)$ 是超可解的，则 G 是超可解。后面这个性质极为重要，它引入这样的定义：形成类 F 称为饱和的，如果 $G/\Phi(G)\in F$ 则 $G\in F$。）上面四个形成类都是饱和类。伽绪茨引入由局部形成类 F_p 构造 F 的造法，并证明如此引入的 F 是饱和类。1978 年 P·施密特（Schmid）证明每个饱和类均可如此局部定义。下面两个概念也很重要：

①F 覆盖子群。若 $G(F)$ 表示 G 中使 $G/N\in F$ 的所有正规子群的交，则 G 的子群 H 称为 F 覆盖子群。如 $H\in F$，且对所有子群 $S>H$，$S=S(F)H$。

②F 投射子。F 的子群 H 称为 F 投射子，如果当 $N\lhd G$，HN/N 是 G/N 的极大 F 子群。

浩克斯（Hawkes, Trevor, 1936—）证明这两个概念有关：若 F 是形成类，G 为有限可解群，则

①G 的每个 F 覆盖子群是 F 投射子。

②如 F 是饱和形成类，则 G 的每个 F 投射子是 G 的 F 覆盖子群。

如果 F 是有限幂零群的形成类，则 F 覆盖子群和 F 投射子重合。而 G 的卡特子群正好就是这些 F 覆盖子群或 F 投射子，而且每个卡特子群包含一个系统正规化子 N，

$$N=\bigcap_{i=1}^{k}N_G(Q_i),$$

其中 $\{Q_1, \cdots, Q_k\}$ 是有限可解群的西洛系，Q_i 是 G 的浩

尔 p' 子群。在伽绪茨的指导下，舒恩克（Schunck）1967 年在他的博士论文中完全解决下列问题：对什么类 F，使得每个有限可解群中存在 F 覆盖子群，这种类称为舒恩克类。

1967 年费舍尔（Fisher，Bernt，1936—）、伽绪茨和哈特莱（Hartley）引入费廷类及 F 内射子的概念。这样每一个有限可解群包含一个唯一的 F 内射子的共轭类。这些内射子一般不同于卡特子群，形成另一类重要的特殊子群。

群正如许多其它代数结构一样，划分为两大部分：可解及半单。

G 为半单，如

$G=G'$ 且 $G/Z(G)$ ＝非交换单群的直积。

G 称为准单，如

$G=G'$ 且 $G/Z(G)$ ＝非交换单群。

对半单群，我们有如下定理：

半单群分解定理 如 G 为半单群，则

①$G=G_1\cdot G_2\cdots G_n$；

②G_i＝准单群 $\neq\{1\}$；

③ $[G_i, G_j]=1\ (i\neq j)$。

而且满足上述条件的 G_1，G_2，…，G_n 唯一决定。反之，如 G 满足①、②、③，则 G 为半单群。

4.5 有限单群

研究单群必须首先找到一些具体的群，看看它们是否单群，也就是否存在正规子群。如果不存在正规子群，它就是单群；如果存在，我们再研究其正规子群，如此下去。最早知道的一类单群是素数阶循环群，它们也是仅有的一系列交换的单

群，由于它们是平凡的，我们一般不特别考虑。其余单群都是非交换的，我们的目标也就是找出所有这些非交换单群，并且加以分类，面对抽象定义的群，实际上并没有什么好办法。因此我们常常需要找一些具体的群来看看。最早研究的置换群中，n 个事物的所有置换构成的群称为对称群，记作 S_n，它的元素数目为 $n!$ 个。对称群 S_n 中包含一个正规子群，它的指数为 2，因此，它的元素数目为$\frac{n!}{2}$，这个群称为交错群，记作 A_n。伽罗华在研究代数方程是否可用根式求解时，首先注意到交错群。他证明当 $n \leqslant 4$ 时，A_n 是可解群，而 $n \geqslant 5$ 时，A_n 均为单群。这也就是为什么一般五次及五次以上代数方程不能用根式求解的理由。这样一来方程论的问题衍生出一个群论问题，即除 A_n 外还有没有其它的单群。

1．李型单群

1870 年法国数学家若尔当在他的大著《置换及代数方程论》中通过另外方法，即由线性变换或矩阵生成一些群，例如他引进：

①一般线性群 $GL(n, p)$，由所有 n 变元的模 p 可逆线性变换构成的群，用现代语言来说即以有限域 $GF(p)$ 的元素为矩阵元的可逆矩阵构成的群。

②特殊线性群 $SL(n, p)$，由 $GL(n, p)$ 中所有行列式为 1 的矩阵构成的群。

③射影特殊线性群 $PSL(n, p)$，由 $SL(n, p)$ 模对角矩阵群所得的商群。

④正交群 $O(n, p, Q)$，$GL(n, p)$ 中使二次型 Q 变成自身的所有线性变换构成的群。

⑤辛群 $Sp(2n, p)$，$GL(2n, p)$ 中使交错双线性型

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{n+k}-x_{n+k}y_k)$$

变到自身的所有线性变换构成的群。

他还引进其它的群，并证明其中许多群或指数为 2 的子群为单群。

30 年后，美国数学家狄克逊系统地推进若尔当的工作。他的工作受到两方面的影响：一是复半单李代数分类的工作，一是他的老师 E·H·莫尔关于有限域分类的工作。1897 年，E·H·莫尔、伯恩塞德以及瑞典数学家维曼（Wiman, Andreas, 1865—1959）独立地将 $PSL(n, p)$ 扩展到 $PSL(n, q)$，其中 q 是 p 的整幂。狄克逊继续将所有典型群（即线性群、辛群、正交群以及 1898 年由莫尔提出的酉群）推广到任意有限域上，后来他还得到 $G_2(q)$，$q>2$ 以及 $E_6(q)$，他得出这些群的阶，并证明其为单群。但是他的方法很特殊，很难看出他们之间的统一性，即使如此，狄克逊的有限单群的表，在其后 50 年间，根本没有变化，也就是一个新的单群也没有发现过。当然早在狄克逊之前，已经知道有 5 个马丢单群，其单性是米勒在 1900 年证明的。伯恩塞德当时已把它们叫做散在单群，因为它们不能用有限域的线性变换来表示。

1955 年，法国数学家薛华荔（Chevalley, Claude, 1909—1984）取得重大突破。他在日本东北（*Tohoku*）数学杂志上发表一篇重要论文，这篇论文不仅得出一系列新单群，而且更重要的是用一种全新的统一的观点来观察问题，从而开辟一个崭新的方向，它最终导致单群分类完全解决。这篇论文已公认是 20 世纪重要的经典文献。

薛华荔的思想来源于有限群和有限维复李代数之间的一种类比，有限群是第一个被发现的也是最基本的抽象代数结构，但是复单李代数却是第一个得到完整分类的结构，它们中间有许多共同语言，如单、可解、幂零等等。若尔当和狄克逊发现的单群都与有限域有关。薛华荔于是考虑到通过适当基域的变换以及找到适当的格子，实现复单李代数与一个有限群 $G(q)$ 的对应。这样一来，他不但可以造出过去已知的大部分单群，而且对应李代数 F_4、E_7、E_8 产生出新的有限单群无限系列。

这样薛华荔造成 9 个李型单群无限系列，列表如下：

记号	狄克逊记号
$A_n(q)$, $n\geqslant1$	$L_{n+1}(q)$
$B_n(q)$, $n\geqslant3$	$\Omega_{2n+1}(q)$
$C_n(q)$, $n\geqslant2$	$PSp_{2n}(q)$
$D_n(q)$, $n\geqslant4$	$\Omega_{2n}^{+}(q)$
$G_2(q)$	
$F_4(q)$	
$E_6(q)$	
$E_7(q)$	
$E_8(q)$	

薛华荔群的构造方法实际上是一个非常一般的方法，并不限于专门造有限单群。

如果 G 是连通复李群，g 为其李代数，对于 g 的每一个元素 X，由复数加法群 C 到线性群——g 的自同构群 $Aut(g)\subset GL(g)$ 的映射

$$t \to \exp(\mathrm{tad}X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m (adX)^m$$

是一个加法群 C 到 $Aut(g)$ 的一个单参数子群的同态，其中 $ad(X)$ 是 g 的自同态 $Y_1 \to [X, Y]$，这些子群生成 $Aut(g)$ 中的一个子群（称为 G 的伴随群），它同构于 G/C，这里 C 是 G 的中心。

如果 G 是单李群，薛华荔证明存在 g 的一个基，使得其中某些元素 X_r 具有下列性质：

$$t \longmapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m (ad(X_r))^m,$$

X_r 所对应的单参数子群 X_r 本身单独就已经生成整个伴随群，此外它们还满足：

①对于 m 足够大时，矩阵 $(ad(X_r))^m$ 等于 0，从而使得 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m (ad(X_r))^m$ 事实上是一矩阵，其矩阵元是 t 的多项式。

②这些多项式还是整系数多项式，于是我们可以把这些多项式中的 t 换成任何一个交换域 k 中的元素，而得到系数属于 k 中的矩阵的群 $X_r(k)$，它是 $GL(n, k)$（如果 $n = dim\, g$）的子群。于是可以证明，除了 4 个例外情形之外，由 $X_r(k)$ 生成的“抽象”群 $G_k < GL(n, k)$ 都是单群，我们称 G_k 是分裂薛华荔群。其中某些群从若尔当和狄克逊起已经被研究过，并且也证明过它们是单群，然而证明方法都是依赖于所考虑的群的类型而专门采用的特殊方法，而薛华荔的方法就不依赖于群的类型，并且对于 F_4，E_7，E_8 型的群，还给出新的结果，而这些单群是以前没有得到过的。特别当取 k 为有限域时，还可以得出一些新的有限单群系列。

薛华荔的统一造法很快地被稍加改造得出其它7个系列的李型单群，为了区别前面9个系列，常称为扭型（*twisted*）的李型单群，它的想法是从复单李代数过渡到实型，由于复李代数 A_n，D_n，E_6 所对应的邓肯图都存在反射自同构（也就是周期2的自同构），相应可以造出对应的扭型李型单群 ${}^2A_n(q)$，${}^2D_n(q)$，${}^2E_6(q)$。其中 ${}^2A_n(q)$ 对应酉群，${}^2D_n(q)$ 对应偶数维正交群。还有另外一个特殊的群是 ${}^3D_4(q)$，它由于对应邓肯图有周期3的对称性，因此是特殊产生的一个无穷系列群。这4个无穷系列群是斯坦因伯格1959年在一篇题为“薛华荔主题的变奏”的论文中构造出来的，真是名副其实。在斯坦因伯格之前，也有人造出个别的群，只是他能系统地得出这些系列的单群。

1960年，铃木通夫（Suzuki, Michio, 1926—1997）发现一无穷系列单群 $S_Z(2^n)$，n 奇，$n>1$，他并没有用李代数或李群的方法去构造，但韩国数学家李林学（Ree, Rim Hak）马上就看出它可以通过正交群的扭型用斯坦因伯格的方法得出，从而

$$S_Z(2^n)={}^2B_2(2^n)。$$

1961年李林学稍稍改变斯坦因伯格的方法产生另外两个无穷系列单群：${}^2G_2(3^n)$ 和 ${}^2F_4(2^n)$，但这里的 n 只取奇数。这样一来，7个扭型的李型单群的无穷系列完全通过一种统一的方法构造出来。

7个扭型的李型单群无限系列列表如下：

记号	原来记号
${}^2A_n(q)$，$n\geqslant 2$	$U_{n+1}(q)$
${}^2D_n(q)$，$n\geqslant 4$	$\Omega_{2n}^-(q)$

$^3D_4\ (q)$

$^2E_6\ (q)$

$^2B_2\ (2^{2m+1})$，$m\geqslant 1$　$S_Z\ (2^{2m+1})$

$^2F_4\ (2^{2m+1})$，$m\geqslant 0$

$^2G_2\ (3^{2m+1})$，$m\geqslant 1$

这7个扭型的李型单群系列，加上9个薛华荔群系列通称李型单群，也有的通称薛华荔群。

2. 马丢群

马丢群在有限群论中占有特殊的地位，一方面它是除 S_n 及 A_n 之外重数最高的多重可迁置换群，另一方面它是最早发现的例外或散在单群。对它的研究通过它与组合论及几何等方方面面的联系，直接推动有限群论的发展。

马丢发现马丢群的时候，群论还在它的原始阶段。若尔当的划时代著作《置换及代数方程论》还得等到10年之后才出版。正是这部著作才真正明确定义许多置换群的基本概念，例如可迁群、本原群及多重可迁群等。书中还引用马丢的结果，它还是用以前的语言写出的。1859年至1861年他发表有关群论的论文是解决置换群论的最古老问题：n 个独立变元的函数

$$f\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

在变元进行置换时，f 可能取多少不同的值？他1861年发表的80多页的长篇论文的题目就是"关于多变量函数，它的构成方式以及使它不变的置换研究"，可见当时的群论不但没有离开置换，也没有离开方程。

在这篇论文中，马丢用一个一般的方法来得到多重可迁群。特别是他造出在12个点或字母上5重可迁置换群，同时

他宣告存在 24 个点或字母上的 5 重可迁置换群，这就是现在的 M_{12}和 M_{24}。M_{24}一直到 1874 年才给出明显的构造，它的构造是从分式线性变换

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

所构成的射影线性群出发，其中系数 a，b，c，d 属于伽罗华有限域 $F(q)$，这个群作用在 $F(q)$ 上的射影直线是 3 重可迁群。马丢设计一个方法造出 5 重可迁群。

M_{12}还是强 5 重可迁群，也就是使 5 点不动的置换只有么元（恒等置换），M_{11}是 M_{12}的 1 点稳定化子，它是 11 点的强 4 重可迁群。若尔当在 1872 年证明，强 4 重可迁群只有 S_4，S_5，A_6 或 M_{11}，这也是 M_{11}的一个刻画。M_{10}是 M_{11}的 1 点稳定化子，它同构于 $A_6\cdot 2$，M_{11}还有一个例外在 12 点上的 3 重可迁作用，其 1 点稳定化子同构于 $PSL(2, 11)$，从而 $PSL(2, 11)$ 具有自然的 12 次 2 重可迁作用和例外的 11 次 2 重可迁作用。

同样，M_{24}是 5 重可迁置换群，M_{23}是其 1 点稳定化子，M_{22}是其 2 点稳定化子。因此，它们分别是 4 重可迁的和 3 重可迁的，M_{22}的 1 点稳定化子同构于 $PSL(3, 4)$，它 2 重可迁作用于 4 阶射影平面的 21 个点上。

至此，5 个马丢群作为置换群已经完全构造出来。

当时马丢和其他数学家所关心的并不是单群问题，5 个马丢群的单性一直到 19 世纪末才得到证明。美国代数学家柯尔（Cole, Frank Nelson, 1861—1926）在 1894 年首先证明 M_{11}是单群。1899 年到 1900 年米勒证明 M_{12}，M_{22}，M_{23}，M_{24}是单群。

其后，许多数学家研究更明显的造法。美国数学家卡迈克尔（Carmichael, Robert, 1879—1967）在1937年出版的书中用具体的生成元和关系把它表现出来：

设 a，b，c 为12点上的置换，

$a=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$，

$b=(4\ 5\ 3\ 9)(10\ 7\ 2\ 6)$，

$c=(0\ 11)(1\ 10)(2\ 5)(3\ 7)(4\ 8)(6\ 9)$，

则 M_{11} 由 a，b 生成，即

$M_{11}=\langle a, b\rangle$，

$M_{12}=\langle a, b, c\rangle$。

同样设 d，e，f 为24点上的置换，

$d=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ \cdots\ 21\ 22)$，

$e=(2\ 16\ 9\ 6\ 8)(4\ 3\ 12\ 13\ 18)(10\ 11\ 22\ 7\ 17)(20\ 15\ 14\ 19\ 21)$，

$f=(0\ 23)(1\ 22)(2\ 11)(3\ 15)(4\ 17)(5\ 9)(6\ 19)(7\ 13)(8\ 20)(10\ 16)(12\ 21)(18\ 14)$，

则 $M_{23}=\langle d, e\rangle$，$M_{24}=\langle d, e, f\rangle$。

设 g，h，k 为22点上的置换，

$g=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21)$，

$h=(0\ 3\ 4\ 8\ 2)(1\ 7\ 9\ 6\ 5)(11\ 14\ 15\ 19\ 13)(12\ 18\ 20\ 17\ 16)$，

$k=(10\ 21)(0\ 20)(1\ 9\ 7\ 5)(11\ 13\ 15\ 19)(3\ 16\ 2\ 12)(4\ 18\ 8\ 17)$，

则 $M_{22}=\langle g, h, k\rangle$。

马丢群还有许多其它的置换表示。马丢群最重要的表示是

1938年由德国数学家维特（Witt，Ernst，1911—1991）得到的，它的意义远远超出马丢群的范围，实际上建立了群与组合学（组合设计与组合几何）的联系。具体地讲，他把马丢群看成史坦纳三元组的自同构群。

下面简单讲一下史坦纳三元组。

1850年，英国数学家寇克曼提出一个著名问题，这个问题后来发展成为组合数学中一个大分支——史坦纳三元系理论，在各方面有着重要应用。

他的问题是这样的：在一所寄宿学校某班中有15名女生，他们经常每天3人一组出去散步，为了增进每个学生同其他学生的友谊，使得每个学生与另外任何学生一起散步的机会都相同，问应该怎样安排，使得每一星期中，每个女生都恰好有一天跟其他任何一位女生一起散步？

从一个女生出发，她星期一同两位女生散步，星期二换两位，这样下去，她在一星期之内同其他14位女生都一起散过步。对她来说这样安排并不困难，可是将每位女生都得这样轮一遍，就不太好安排了。

由这个问题自然发展为史坦纳三元系，$S(\Omega, B) = S(t, k, v)$。它是一个 v 点构成的点集 Ω 以及 Ω 中 k 元素子集构成的区组集 B，使得 Ω 中每个 t 元素子集只属于 B 中一个区组。显然15个女生问题构成一个史坦纳系 $S(2, 3, 15)$，有趣的是有限域 $F(q)$ 上的 d 维仿射空间和射影空间都可以看成史坦纳系。

$F(q)$ 上 d 维仿射空间对应的史坦纳系 $S(\Omega, B)$，Ω 共有 q^d 个点，B 为仿射直线的集合，每条直线上有 q 个点，每两个不同点都有一条仿射直线联结它们，因此 $t=2, k=q, v$

$=q^d$，即史坦纳系 $S(2,q,q^d)$，其自同构群为 $A\Gamma L(d,q)$。

F（q）上 d 维射影空间共有 $v=\frac{q^{d+1}-1}{q-1}$个点，每条直线上有 $k=q+1$ 个点，每两不同点在一直线上，因此对应 S（2，$q+1$，v），$P\Gamma L$（$d+1$，q）是该史坦纳系的自同构群。

通常的置换集合 X 是一个纯粹的有限集合 $|X|=v$（其元素用点或字母表示，数字只是标记，并没有结构的意义），但史坦纳三元系则不只是纯粹的集合，它还规定一些特殊的子集合，称为区组（*block*），史坦纳三元系每个区组都具有相同数目的点（记作 k）。另外满足这样的条件，即所有 t 点的子集都只属于唯一一个区组，这样得到的史坦纳系也称史坦纳三元系，它由三数 v，k，t 所决定，记作 S（t，k，v）。为了消除平凡的情形，我们不妨假定

$$t<k<v。$$

史坦纳系的自同构不仅是 X 的点集合的一个置换，而且还要求把区组变到区组。因此史坦纳系的自同构群不仅作用在点集合上，而且作用在区组集合 B 上，$|B|=b$。可以证明，这两种作用还是有关系的：

①G 在 B 上的轨道数 $\geqslant G$ 在 X 上的轨道数。

②如 G 可迁地作用于 B 和 X 上，则 G 作用于 B 的轨数 $\geqslant$ G 作用于 X 的轨数。

由定义，史坦纳系 S（t，k，v）的自同构群是对称群 S_v 的子群。如果我们考虑 S（t，k，v）中包含给定元素 a 的区组，我们就可以得到 $X-\{a\}$ 上的史坦纳系 S（$t-1$，$k-1$，$v-1$）。这样从 M_{12} 和 M_{24} 的史坦纳系可得出 M_{11} 和 M_{22}，M_{23} 的史坦纳系。在这个指导思想之下，维特证明：

$$Aut\ (S\ (5,\ 6,\ 12))\ = M_{12},$$
$$Aut\ (S\ (5,\ 8,\ 24))\ = M_{24}。$$

由此推出，存在史坦纳系 S（4，5，11）和 S（4，7，23），使得

$$Aut\ (S\ (4,\ 5,\ 11))\ = M_{11},$$
$$Aut\ (S\ (4,\ 7,\ 23))\ = M_{23}。$$

但是，

$$Aut\ (S\ (3,\ 6,\ 12))\ = Aut\ (M_{22}),$$

其中 Aut（M_{22}）是 M_{22}的自同构群。M_{22}是 Aut（M_{22}）的子群，指数为 2。

马丢群也可以用 2 中心对合的中心化子的结构来刻画：

M_{11}	布劳尔	1954
M_{12}	布劳尔和冯	1966
M_{22}	扬科(Janko, Zvonimir, 1932—)	1968
M_{23}	扬科	1968
M_{24}	赫尔德	1969

但是马丢群的唯一性定理在 20 世纪 40 年代末就已经开始研究，这显然是因为它们是比较例外的情形。

马丢群唯一性定理 如 G 是 $|M_n|$ 阶单群，$n = 11$，12，22，23，24，则 $G \cong M_n$。

M_{12}	斯坦顿	1951
M_{24}	斯坦顿	1951
M_{11}	王	1964
	派罗特	1970
M_{22}	派罗特	1970
M_{23}	布赖斯	1969

3. 散在单群

到 1960 年，人们已经知道所有非交换的有限单群都可以纳入 17 个无穷“系列”当中：有限薛华荔群及其变种以及交错群 A_n ($n \geqslant 5$)，再加上早在 100 年前由马丢发现的 5 个例外单群。当时猜想，也许这些就是所有的单群了。没有料到，1965 年南斯拉夫数学家扬科发现了又一个新的散在单群 J_1，其阶数是 $175560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$。

散在单群的发现过程当然是不同寻常的，因为它们不能列入一种有规则的系列当中，只能一个一个通过特殊的方法去寻找，而且谁心里也没底，到底有多少个散在单群，有限还是无穷？

发现散在单群的过程表明，它们与已知的群多少有些联系。实际上，所有单群都是某个交错群 A_n 的子群，这当然太泛了，不过这却启发人用置换表示去寻找群。不过扬科的 J_1 却是从一种特殊的李型单群中挖出来的。

李型单群中有一类李林学群 $^2G_2$ (3^{2n+1})，这个系列难于刻画，于是几位群论大家集中考虑这个问题，按照布劳尔的纲领，单群的刻画可通过对合的中心化子来实现。

于是扬科和汤姆逊研究这样的问题：定出所有的有限单群 G 具有这样的性质：

①G 具有一个对合使得其中心化子

$$C_G(Z) \cong Z_2 X L_2(q),$$

q 是奇数。

②G 的西洛 2 子群是交换的。

1965 年他们两人运用特征标理论与局部群理论证明：在这种假定条件下，

q 是 3 的奇数次幂或者 $q=5$。

华尔德（Ward, Harold）也同时得到这个结果。显然 q 是 3 的奇数次幂时，正好给李林学单群一个刻画，只有扬科没有就此终止，他进而考虑 $q=5$ 的情形。他证明，在这种情形下，只存在唯一一个单群，它就是 J_1。他认识到这个问题的重要性，就抢先把这个结果很快地单独发表在 1965 年美国科学院院报上，而其余部分到 1966 年才出版。

扬科把 J_1 作为 GL（7, 11）的子群来考虑的，1967 年李文斯通（Livingstone, D.）造出 266 顶点的图 Γ，而 J_1 是其自同构群，J_1 在 Γ 上可迁地作用。

扬科用同样的方法在 1967 年发现了两个新的散在单群 J_2、J_3，他考虑如果有限单群中对合的中心化子是特殊的群，它由 2^5 阶的超特殊群用 A_5 扩张得到，具有这种形式的中心化子的单群在交错群和李型单群中是不存在的。在关于中心化子的假定（后来阿什巴赫尔把它记作 $H(2, A_5)$）之下，扬科证明 G 只有两种可能性：如果 t 的共轭类有两个，则

$$|G|=2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7=604800;$$

如果 t 的共轭类只有 1 个，则

$$|G|=2^7\cdot3^5\cdot5\cdot17\cdot19=50232960。$$

这两种情形下，可以唯一造出 G 的特征标的表。实际上，扬科只是定出 G 的阶数以及 G 的局部结构，但是他没有能证明，在这两种情况下，群的确存在。他也没能证明，如果存在则是唯一的。后来证明 J_2 的存在性是 M·浩尔（Hall, Marshall, 1910—）和威尔斯（Wales David）在 1968 年做出的，而 J_3 的存在性是 G·希格曼和马凯（Mckay, John）在 1969 年证明的。实际上这是一个发现散在单群的模式，即考虑群具有某个中心

化子，往往满足一定的假设：对于适当 W 和 L，有 H（W，L）。这些数学家发现的群，通常只是证明有个满足他的假设的群的阶和它的局部结构被决定，但是并没有证明群的存在性及唯一性。

用这个模式发现的散在单群还有在 1969 年由亥尔德（Held, Dieter）发现的亥尔德群 He。实际上，这个群在扬科发现 J_2，J_3 时已经出现，亥尔德考虑的是对合的中心化子满足 H（3，PSL（3，2））这个假设。具体地说，他发现 PSL（5，2）和 M_{24}中，如果把对合 t 取在西洛 2 群的中心之中，其中心化子同构于 H，这样的单群除了 PSL（5，2）和 M_{24} 之外，还有第三种情形存在，他定出其阶为

$$2^{10}3^3 5^2 7^3 17。$$

1970 年李昂斯（Lyons, Richard, 1945—）在他的芝加哥大学博士论文中研究对合的中心化子为交错群的中心扩张的问题。实际上这是扬科工作的继续。扬科证明以 A_9 的中心扩张为对合中心化子的单群不存在。后来证明 A_n（$n \geqslant 12$）的情形，单群也不存在。李昂斯研究 A_{10}和 A_{11}两种情形，他证明 A_{10} 情形，单群也不存在，可是 A_{11}情形可能存在，这个唯一的机会让他抓到了，他确定有一个阶数为

$$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$$

的单群，而且证明它包含薛华荔群 G_2（5）。不久西姆斯用计算机造 G_2（5）的可迁扩张，满足上述条件，最后造出这个群 Ly。

奥南群 ON、大魔群 F_1 以及最后发现的扬科群 J_4 最初也是这么发现的，不过它们都涉及一些其它的散在单群。另外，也有一些散在单群，先用其它方法发现，后来发现可以用对合

的中心化子刻画。如麦克洛夫林群 Mc，显然这对从不同角度认识单群，特别是散在单群极有好处。1965 年到 1975 年这热火朝天的十年历史也的确证明这一点。

第二类发现和研究散在单群的方法是置换群或置换表示的方法。实际上，它最早也来自扬科群 J_2 的研究。扬科发现 J_2 后不久，M·浩尔和威尔斯就通过另外的途径把它造出来。它是把 J_2 作为 100 次可迁群造出来的。这时，1 点的稳定化子与酉群 PSU（3，3）同构，从扬科而求出的群的特征标表看出，J_2 可能存在 100 次的置换表示。而如果存在 100 次置换表示，使得 PSU（3，3）为 1 点稳定化子，这样可构成所要的群。于是 M·浩尔等人借助于计算机从 PSU（3，3）出发，造出其 100 次的可迁扩张，并证明它就是满足 J_2 的定义条件的唯一的散在单群，它的特点就是 J_2 是 3 轨置换群。

这里 3 轨的原文是秩（*rank*），由于秩在数学，特别是群论和李群李代数理论中常用，在置换群理论中使用容易造成混淆，因此这里用更为形象的词。置换群与抽象群的不同之处在于它必须有一个被置换的集合，我们这里只考虑有限集合 Δ。它的元素是有限多个点，定义 G 在 Δ 上的轨（*orbital*）就是 G 在 $\Delta\times\Delta$ 上作用的轨道。G 的置换轨（秩）数就是 G 的轨数。它等于 Gx 在 Δ 上的轨道数目（对任何 $x\in\Delta$）。3 轨置换群最早是 D·G·希格曼从 1964 年起系统研究的，没料到大部分散在单群有 3 轨的置换表示。

M·浩尔在牛津大学报告了这个工作以后，在场的 D·G·希格曼和西姆斯马上就用这个方法来造马丢群 M_{22} 的 100 次可迁扩张。他们取 M_{22} 的三个置换表示，次数分别为 1 次，22 次和 77 次，把三个表示集的正好 100 个点造一个 100 顶点的图。

这个图的自同构群在这集合上可迁地作用。第二天这个新的单群——希格曼—西姆斯单群 HS 就诞生了。

铃木通夫在收到希格曼—西姆斯的论文预印本之后，两三周内用同样的方法构成 3 轨的可迁系列

$PSL(2, 7) < PSU(3, 3) < J_2 < G_2(4) < Su_2$,
每一阶段都造成一个图，使得群作为 3 轨本原置换群作用在其上，最后得出图的自同构群，即铃木散单群 Suz（不要同李型单群中的铃木群 S_Z 混淆），其阶数为 $2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$。

上面系列实际上类似于

$A_6 < PSL(3, 4) < PSU(4, 3)$
的 3 轨可迁扩张系列。在铃木的同时，麦克洛夫林也想到 $PSU(4, 3)$ 进一步可迁扩张，从而得到麦克洛夫林群 Mc，它是 3 轨本原置换群，其阶数为 $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$。

这三个群都是 1967 年发现的，下一个到 1973 年才由路得瓦利斯（Rudvalis, Aranas）发现，他找到带菸群作为可迁扩张的群，从而得到 3 轨本原置换群，此即路德瓦利斯群 Ru。这个群如果存在，则存在它的由 Z_2 的中心扩张，他证明它存在 28 维表示。其后康威（Conway, John Horton, 1937—）及威尔斯用 28 维空间向量构成 4060 个顶点的图，其自同构群即 Ru 的 2 重覆盖。

实际上，所有典型群都有 3 轨的置换表示：线性群作用在射影空间的直线集合上，辛群及酉群作用在“绝对点”的集合上，正交群作用在“奇点”的集合上。因为它们的表示和李型群的结构明显相关，在每种情形下，单点稳定化子是抛物子群。E_6 在适当抛物子群上也有类似的 3 轨表示。4 重可迁群（交错群、对称群、马丢群）也有这种表示。

维兰德在1955年证明，若 p 是素数，$2p$ 次本原置换群或者是2重可迁群，或者是3轨群。由此可见3轨群在置换群中的重要地位。这推动了D·希格曼建立系统的3轨置换群的理论，他的方法是造出相应的区组设计以及相关的关联矩阵。他刻画典型群就是用这种方法。M·浩尔和威尔斯最早构造 J_2 也是这种方法，但这种方法很快被西姆斯在1967年创造的新方法所超过，他是对每一个可迁群造出一个定向图，通过图的自同构群，即可决定该群，而且通过图的型，可以证明该型图对应单群的唯一性。散在单群 J_2，HS，Mc，Suz，Ru 的唯一性即是这样得到的。

费舍尔通过由3对换来生成新群。他考虑 G 中所有对合的共轭类 D，它满足：

如 t，$s \in D$，则 ts 的阶数为1，2或3，这时称 D 为3对合的共轭类。

费舍尔研究由3对合的共轭类生成的有限群 G，他得出下列定理：

如 G 没有平凡的可解正则子群，且 $G' = G''$（即换位子群 $[G, G] = [[G, G], [G, G]]$），则 G 是对称群，F（2）上的正交群、辛群、酉群或 F（3）上的正交群。此外还有3个例外群 M（22），M（23），M（24）。费舍尔证明，M（22），M（23）及 M（24）的交换子群是散在单群。

大约同时，康威发现另外3个单群——康威群 Co_1，Co_2，Co_3。他是通过研究所谓李奇（Leech, John）格的自同构群得到的。

格子概念是从结晶学来的。实际上，它是一堆同等大小的球的集合，这种球的堆积有的不规则，有的很规则，它们可以

通过球心反映出来。我们可以固定一个球的中心，记作 O。其它球的中心就可由 O 到该球中心的向量 u 来表示。假如一堆球满足下面条件：如果向量 u 和 v 是这堆球中任两球的中心，则 $u+v$ 和 $u-v$ 也是这个堆中球的中心，就称这堆球为格子。结晶学中的格子称为布拉维格子，它们都可以找到 3 个中心 v_1，v_2，v_3，使得格子中所有球的中心都可以表示成为

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3,$$

其中 k_1，k_2，k_3 为整数，这时 v_1，v_2，v_3 就称为格子的基，而由所有点

$$\theta_1v_1+\theta_2v_2+\theta_3v_3\ (0\leqslant\theta_i\leqslant1)$$

所构成的平行六面体，称为基本域。格子显然构成一个群。对于任意维 n，我们不难把格子的概念加以推广。

另一方面，对于 n 维球的堆积，不管它们是不是格子，我们有两个至关重要的基本问题：

①最大吻数问题。对于所有 n 维球的堆积，每一个球最多和多少个相同的球切触，这个数目称为（最大）吻数（*kissing number*）？对于 1 维球堆积显然吻数为 2，2 维球堆积吻数为 6，而 3 维球堆积，早在 17 世纪对吻数就有争论。大科学家牛顿认为是 12 个，而格里高里（Gregory David，1659—1708）认为是 13 个。1694 年他们热烈争论，最终牛顿的结论正确，但证明到 19 世纪才给出。20 世纪给出简单证明的有范·德·瓦尔登和李奇。从 4 维到 7 维，分别发现格子 D_4，D_5，E_6，E_7，在所有格子球堆积中，具有最大的吻数 24，40，72，126，但对于所有格子或非格子的球堆积中它们是否最大，尚未得到证明，只是 8 维格子 E_8 已经证明对任何球堆积，它具有最大的吻数 240。

②最密堆积问题。在 n 维球的堆积中，怎样的堆积最密，也就是球与球之间的间隙最小？表面上看，最大吻数应该具有最密堆积，实际上并非如此，尤其是高维情形。对于球堆积不管是否是格子，只证明 1 维、2 维确实具有最密堆积。3 维情形就是著名的开普勒（Kepler）问题，面心立方格子具有最密堆积。项武义于 1990 年声称他证明这结果并于 1994 年发表，不过仍有专家有异议。不过面心立方格子对所有格子来说，具有最密堆积，早在 1831 年已由大数学家高斯证明。对 4 维至 8 维情形，D_4，D_5，E_6，E_7，E_8 具有最密堆积，只是对所有格子来说才得到证明。如果包括非格子堆积，这个问题尚未解决。

对于更高维数，不管是格子还是非格子堆积，这两大问题还都没有得到很好解决。令人惊奇的是，1967 年李奇发现 24 维格子具有最大的吻数 196560，这个成为高维情形唯一的确切结果，不过，李奇格是否最密堆积还没有证明。

有了李奇格，就可以定义它的保持原点 O 的自同构群，康威称之为·0，其阶为

$$|\cdot 0| = 2^{22}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23,$$

它是 24 维正交群的子群，但不是单群。它有一个中心，由把向量 v 变成 $-v$ 的自同构生成，·0 由这个中心得到的商群，康威记作·1，这就是康威单群 Co_1，其阶数为

$$2^{21}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23。$$

·0 在距离原点 O 最近的 196560 个点上可迁地作用，把其中一点固定的稳定化群称为·2，它就是康威单群 Co_2，阶数为

$$2^{18}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11\cdot 23,$$

距离原点 O 次远的点的稳定化群称为·3，它就是康威单群

Co_3，阶数为

$$2^{10}\cdot3^7\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot13。$$

从这个观点出发，散在单群 Mc 和 HS 也是·0 的子群，这两个群还可以通过模子李奇格来定义，所谓模子李奇格即 $\widetilde{\Lambda}=\Lambda/2\Lambda$。

魔群序列

费舍尔的论文预印本流传之后，阿什巴赫尔立刻把 3 对换推广为 $\{\sigma\}$ 对换，其中 $\{\sigma\}$ 是某些 2 以上正整数的集合，3 对换共轭类推广为 $\{\sigma\}$ 对合共轭类 D，即满足：

如 $s, t\in D$，则 st 的阶数为 1，2 或 $\{\sigma\}$ 中的正整数。阿什巴赫尔证明当 $\{\sigma\}$ 只含奇数时，得到了费舍尔定理的推广，包括特征 2 有限域上的辛群、酉群和正交群以及铃木群。

蒂莫斯费尔德（Timmesfeld，Franz）考虑 $\{3, 4\}$ 对换共轭类 D，他证明如果加上条件：如 st 为 4 阶元素，则

$$(st)^2\in D, \qquad (*)$$

则这样生成的群只限于 F（2）上的李型单群。他还研究 $\{\sigma\}=\{$奇数，4$\}$ 的情形，但没有得到新的散在单群。

1973 年，费舍尔进一步研究 $\{3, 4\}$ 对换共轭类生成的群，但不要（*）这个条件。发现有可能出现一个新的散在单群。这后来得到证实，即小魔群 F_2，它的阶为

$$2^{41}\cdot3^{13}\cdot5^6\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot31\cdot47。$$

这个发现启动了魔群的研究。1973 年末，费舍尔和格瑞斯（Griess，Robert Louis，1945—）独立考虑另一个可能性，即 F_2 的中心扩张可能导致另一个更大的散在单群，满足对合 t 的中心化子正好是 F_2 的中心扩张，这个 t 不属于 G 的 2 西洛

子群的中心，如果 s 是 G 的 2 西洛子群的中心的对合，且

$$C_G(s) \triangleright E,$$

$$C_G(s)/E = Co_1,$$

其中 E 是 2^{25}阶的极特殊群。由此，格瑞斯用汤姆逊的阶数公式得出

$$|G| = 2^{46}\cdot3^{20}\cdot5^{9}\cdot7^{6}\cdot11^{2}\cdot13^{3}\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71。$$

这就是大魔群 F_1。费舍尔在西德比尔费尔德年会上同当时在英国剑桥的数学家康威、汤姆逊、原田耕一郎（Harada, Koichiro, 1941—）和诺顿（Norton, Simon）讨论了魔群存在的可能性。他们证明如这个群存在，则有 3 阶元素和 5 阶元素，它们的中心化子可生成新的散在单群 F_3 和 F_5。原田研究原田群 F_5，定出其阶数及局部结构。但其唯一性证明，一直到 1989 年才由谢捷夫（Segev）证明。汤姆逊研究汤姆逊群 F_3，定出阶数及局部结构，还定出特征标表。由特征标表，他还证明存在 248 次不可约表示。由这个表示，汤姆逊给出唯一性的证明，只用了一页。他用了斯密司（Smith, P.）的计算机计算结果，证明它是李型单群 $F_8(3)$ 的子群，因此，证明其存在性。

4．分类的历史

抽象群论最困难的部分，实际上是单群的分类。正如所有抽象对象一样，达到完整的分类决非一蹴而就，一般总是经历或长或短的几个阶段。以有限单群为例：

（1）从各种不同角度、不同方法，找到一些单群，发现一些单群，然后需要研究它有什么特殊性质，然后刻画它，证明其存在性，唯一性，当然还要证明其单性。

（2）把它们纳入一个系统，也就是用一种统一的观点来分类所有或部分单群。

（3）证明单群分类定理，也就是要解决两大问题：

①存在问题：我们确实知道所有的单群，即我们可以列出所有的单群的表。

②确认问题：这些单群一个不多、一个不少，也就是如果我们能够通过另外途径发现新的有限单群，那么它一定同构于我们表中的某个单群。

有限单群理论是同有限群理论大致平行发展的，所用的工具也大致相同，它的发展大致可分为三个阶段：

（1）1955年以前，在这个阶段，通过不同的方法找到各种各样的单群，研究它们的结构性质以及发展表示理论这个强有力的工具。先是1896年弗洛宾尼乌斯创立的有限群特征标理论和常表示理论；以及1935年布劳尔等创立的模表示理论。诺特等人关于表示论与结合代数的关系大大有助于表示理论的发展，但是具体计算特征标仍然要求有创造性的技巧。

（2）1955年到1985年，这30年是有限单群理论取得突破并最终取得单群分类，被戏称为30年战争。其间有如下几项大突破：

①发现对合的中心化子的关键作用。由于单群 G 没有正规子群，我们希望通过一些它可能包含的特殊子群 S，它们足以反映出 G 的特殊性。由于包含 S 的群可能很多，甚至无穷多，如包含交错群 A_5 的群极多，如 A_6，A_7，…以及 $PSL(q)$。我们必须对于 S 如何嵌入 G 的方式加以限制，如 S 是 G 的极大子群，S 是 G 的西洛 p 群，S 在 G 的某种置换表示中是某点的稳定化子群等等。最后布劳尔找到一个最简单的刻

画方法。1954 年在国际数学家大会上，布劳尔报告，如果 G 是一个单群，t 是一个对合(即二阶元，$t^2=1$)，如果 S 为 t 的中心化子 $C_G(t)$(即 $\{x\in G \mid xt=tx\}$)，则 $|G|<|S|^2$。

1955 年，布劳尔和弗勒（Fowler, Kenneth Arthur, 1916—）证明包括这个定理的许多关于对合的定理。这样，有限单群的研究一下子集中于对合的中心化子之上。

实际上，正如许多伟大思想一样，它们的出发点都非常简单。早在 19 世纪已经知道，如果 G 中有两个不同的对合 σ，τ，则由 σ，τ 生成的群 $\langle\sigma, \tau\rangle$ 是二面体群。如 $\sigma\tau$ 是奇阶元素，$\langle\sigma\rangle$，$\langle\tau\rangle$ 是群 $\langle\sigma, \tau\rangle$ 的西洛 2 群，因此，σ 与 τ 共轭。如果 σ 与 τ 不共轭，则 $\sigma\tau$ 一定是偶阶元素。伯恩塞德在开始研究群论时已经注意到这个事实。布劳尔发现，如果 σ，τ 在 G 中不共轭，则在 G 中可找到一个对合 ρ，使 ρ 对 σ 和 τ 均可交换。实际上选 ρ 为 $\langle\sigma, \tau\rangle$ 的中心的对合即可。这样，布劳尔和弗勒得出，如果 G 中的对合的中心化子已知，那么单群 G 只有有限多种可能性。从而再适当选定 G 的对合的中心化子，我们有可能得到几个，甚至于一个或两个单群，这就使我们得到系统刻画偶阶单群的方法，它就称为“布劳尔纲领”。不仅如此，它还可以成为发现新单群的方法，一批最早发现的散在单群就是这么找到的。

②薛华荔在 1955 年找到生成已知线性群的系统方法，为单群分类迈出重大一步。现在知道，除了循环群和交错群两个有限单群的无穷系列之外，其他 16 个无穷系列的有限单群均可以用薛华荔的方法（或其变形）系统地造出来。没有这种统一的观点，有限单群的分类是不可想象的。

③1963 年费特和汤姆逊在 255 页的大论文中证明，除了

循环群之外，没有奇数阶的单群。实际上他们证明奇阶群均为可解群。这一方面使布劳尔的纲领得以实施，另一方面，还提示西洛2子群（即如果$|G| = 2^n \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$，$p_i$ 为奇素数，则 G 的 2^n 阶子群称为西洛2子群）在刻画单群上也会起一定作用。

④1965年散在单群的发现。1965年群论专家都猜想所有单群都已经知道，即素数阶循环群，交错群以及16个李型单群的无穷系列。另外只有5个不能纳入这18个无穷系列的马丢群。扬科利用对合中心化子的造法发现第一个另外的散在单群 J_1，接着他又发现另外两个 J_2，J_3。很快其他数学家用各种不同的方法找到其它的散在单群。到1976年扬科又找到了 J_4。这样除马丢群之外，又发现了21个散在单群。当时的确问题很多，对于已经发现的散在单群，要去刻划它们，证明其存在性、唯一性、单性，为此要计算它们的特征标表或置换表示。另外更令人困惑的是，是不是还有，是否还有无穷多，如何对它们进行统一的处理。现在我们知道，散在单群只有这26个，不过我们还没有找到对这26个单群的统一刻画。

(3) 1980年以后，实际上，1970年以后，群论专家就已经酝酿有限单群完全分类的纲领。这个分类纲领的总设计师是美国数学家高林斯坦（Gorenstein，Daniel，1923—1992）。他是代数几何学大家查瑞斯基的学生，1950年获得博士学位。他在论文中引进一种交换环，后来就以他的名字命名，他很快地就转向研究编码理论，由于解码的问题，他于1957年被引向有限群论，从此开始他毕生献身于研究有限单群的生涯。而真正的工作到1960年才开始，这对一位数学家来讲，真是太晚了。作为一位专家，高林斯坦与众不同的另外一个特点，就

是他具有非凡的战略眼光，能够综观全局，指挥若定。而这个史无前例的大定理能够完成，无疑要仰赖于这种战略家的纲领。早在1968年出版的《有限群论》一书中，他就已经指出有限群论的主要目标是分类有限单群，并且设计通向成功之路。这种大的纲领即使在现代数学中也是不多见的。

1972年夏天，这个纲领终于成形了。他在美国的代数学研究中心——芝加哥大学所做的一系列报告中，提出了一个16步的可操作方案，这种理想主义的做法真是史无前例。怪不得当时就被一些专家讥讽为科学幻想。就连比较乐观的认为计划基本可行的人，也认为需要到2000年之后才能完成。可是，没有料到，不出5年，几乎所有群论专家都认为分类是完全可行的。这主要是一批年轻人，尤其是阿什巴赫尔对高林斯坦方案中一些关键问题取得突破。1976年到1980年5年间，3000页的论文发表，到1981年2月，高林斯坦正式宣布有限单群的分类业已完成。当然还有不少论文没有印出来，这个问题已经公认为完全解决，而且非常接近高林斯坦原来的方案。尽管其中不可避免有些错误及不足需要修正，高林斯坦的大方向是正确的。

从20世纪50年代中期到80年代中期这30年间，有限单群的分类从取得突破到最终分类完成，其间涉及分类的论文约有几百篇，共10000到15000页，这是有史以来从未有过的情形。证明一个定理，动员上百位数学家投入战斗，它的规模真是太大了。

单群分类的总设计师高林斯坦在1972年提出一个16步方案，当时许多人抱怀疑态度，即使乐观的人也认为得到20世纪末才能完成。没想到1981年初，他们就可以庄严宣告有限

单群分类大功告成。

我们还很少对问题进行历史的分析。实际上，历史的经验很值得深思，单群分类是有限群论的核心，但是由于问题难度太大，许多人只是在它的周围转转，很难深入下去。长期以来，人们只是列举一些单群，看看非阿贝尔单群有什么特殊的阶数。有的计算其特征标表，这样，我们对于单群有一定的感性认识。

第二步实际上是一种突破，即抓住主要的特征，从而可能对整理已知的单群和发现未知的单群有所贡献。

第三步对于大多数单群有一个统一的认识，而且对例外情形进行刻画。

第四步是分类问题最难的一步。因为这时首先要知道，已知的这些单群是足够了，特别是散在单群，直到20世纪70年代中后期，还很难说散在单群到此为止只有26个，因为有可能又出现新的散在单群，甚至说不定有无穷多个。

其次，必须把分类问题归结为有限多种情况，逐一加以解决。这么一个大问题往往不可能入手，这时就必须限制研究对象的范围。分类有限单群就先从分类特殊类型的单群做起，这些都是大论文，我们把篇幅也记上：

①汤姆逊在1968年到1974年发表6篇论文分类极小单群，即这些单群的任何真子群都是可解群，全文共410页。

②沃尔特（Walter，John）1969年分类西洛2子群都是阿贝尔群的单群，共109页。

③阿尔佩林（Alperin，Jonathan）、布劳尔和高林斯坦在1970年分类西洛2子群都是拟二面体群的单群，共261页。

④高林斯坦和原田耕一郎在1971年分类这类单群，共2

子群最多由4个元素生成，共461页。

到了1970年一般有限单群的分类还是没有起色，而由于1971年以来一系列工作，特别是阿什巴赫尔、奔德尔（Bender，Helmut）、费舍尔、梯莫斯费尔德等人的工作，加上20世纪60年代局部分析的方法以及高林斯坦的信号化函子（*Signalizer functor*）方法，到70年代中期，结果十分明朗。这时出现一系列新概念，它们对于之前的群论专家也难以掌握，对于外行来讲，就更不用说了。

从方法上来讲，通过汤姆逊、高林斯坦、瓦尔特等人的局部分析方法与费舍尔、M·浩尔、舒尔特等人的几何方法结合起来，从1972年到1976年5年间，阿什巴赫尔一举解决：

①B猜想。

②薄（*thin*）群问题。

③强P嵌入2局部问题。

同时1976年梯莫斯费尔德证明了关键的散在单群有限性定理。因此，在杜鲁特群论会议上就可以把有限单群的分类方案分分工，把剩余的部分解决掉。这时分类的路线十分明确，经过几次一分为二，就可以大功告成。首先有限单群的分类分为组分型群和特征2型群两大类。组分型群分为一般型和低α秩型两类。特征2型群分为一般型和拟薄群两类。前一部分问题归结为组分型群猜想，它蕴涵不平衡群猜想，而不平衡群猜想又可推出B猜想。最后这个猜想归结为标准型问题而被解决，从而问题转向特征2型群。对特征2型，可引入e（G），e（G）>3由高林斯坦和莱昂斯解决，$e=3$由阿什巴赫尔解决，$e\leqslant 2$即拟薄型，其中$e=1$为薄型。高林斯坦部分300页在1983年发表，但梅森（Mason，Geoffrey）拟薄型手稿800页，

尚有一些漏洞到1989年发现，阿什巴赫尔1992年予以补充。早在1978年，阿什巴赫尔已用了100页解决薄型问题。

在这个伟大定理还没有尘埃落定之时，已经引起群论界的一阵恐慌，将来的出路在哪里？近20年的实践证明，群论正如许多数学领域一样，仍然有解决不完的问题，它的前景依然广阔：

（1）有限单群分类的修正方案用10000页到15000页证明一个数学定理实在不可想象，它引起一种不信任感。设计师高林斯坦最先深切地感到，有必要搞出一个独立的、不借助其它结果的完整而简单的证明。他1982年就提出了这个新的修正方案。后来赢得李昂斯和所罗门（Solomon，Robert）两人的合作，计划用3000页到4000页写出全部证明。他们计划出十几卷分成五个部分，而且完成大量工作。第1、2卷已经分别在1994年和1996年出版。遗憾的是，高林斯坦患癌症于1992年夏去世，其余两位仍在坚持，继续这个工作，直到最后完成。

另一方面，个别定理以及单群分类的个别部分早已在不断修正，当然许多人希望人们能从一种统一的角度特别是几何的观点来理解全部有限单群，这样就会使全部证明更为透明，使认识大大提高一步。

（2）有限单群分类定理推论的证明。分类定理毕竟是20世纪数学的里程碑之一，它的证明导致许多推论，也得出许多问题有待解决。

①施莱尔猜想，即每个单群的外自同构群都是可解群。

由于每个单群的自同构群都已得出，由分类定理自然推出施莱尔猜想。

②多重可迁群的确定，6重及6重以上可迁群只有对称群 S_n 和交错群 A_n，而4重和5重可迁群除3对称群及交错群外，还分别有4个和2个马丢群。

(3) 伽罗华理论的逆问题。有理数域 Q 的每一有限代数扩张均对应一个伽罗华群，反过来每一有限群 G 或者更具体每个单群是否都是 Q 上的某一有限代数扩张的伽罗华群呢？20世纪80年代这个问题引起大量研究，得出一系列令人惊叹的结果。例如汤姆逊证明大魔群是 Q 上的伽罗华群，但一般问题尚未完全解决。

5．单群的表出

利用生成元和关系可把抽象群第一步具体化。对于有限群，显然有有限多个生成元和有限多个关系。当然我们希望把生成元的数目降至最低，而且生成元尽可能"简单"，也就是满足比较简单的条件。

很早人们就猜想（二生成元猜想）所有有限非交换单群均可由两个适当的元素生成。

本世纪初许多数学家对这个问题进行研究，特别是美国数学家G·A·米勒（Miller, G. A. 1863—1951），他从1901年到1928年发表不少这方面的论文。实际上，不难证明对于 $n \geqslant 5$，交错群 A_n 可由两个元素生成，这只需对奇数 n，取生成元为

$$a=(1\ 2\ 3),\quad b=(3\ 4\ \cdots\ n);$$

而对偶数 n，取生成元为

$$a=(1\ 2\ 3),\quad b=(1\ 2)(3\ 4\ \cdots\ n)。$$

通过用 b^i 取 a 的共轭，即可得出

当 n 奇时，$(b^i)^{-1}ab^i=(1,\ 2,\ 3+i)$，$0\leqslant i\leqslant n-3$；

当 n 偶时，$(b^i)^{-1}ab^i=(2,1,3+i)$，$0\leqslant i\leqslant n-3$。而这些 3 轮换，显然生成 A_n。

米勒不仅得出这个结果，他还能把生成元的阶降得最低，具体地讲，他证明，除了 $n=3,6,7,8$ 之外，A_n 可由一个 2 阶元和一个 3 阶元生成。到 1928 年，他又进一步证明，对于任何正整数 $s>3$，如 A_n 包含一个 s 阶元素，则 A_n 可由一个对合（2 阶元）和一个适当的 s 阶元生成。但米勒还没能给出具体的生成元，这到近二三十年才得到。

而一个具体证明 $A_n(n\geqslant5)$ 可由一个对合和一个适当元素生成，到 1984 年由群论大家阿什巴赫尔和古拉尔尼克(Guralnick)给出，当 n 为奇数时，取生成元为

$$a=(1,n)(2,n-1),\quad b=(1,2,\cdots,n-2);$$

当 n 为偶数时，取生成元为

$$a=(1,2)(n-1,n),\quad b=(1,2,\cdots,n-1)。$$

对于特殊的李型单群，证明由两个元素生成可追溯到上个世纪。莫尔证明射影特殊线性群 $PSL(2,p)$ 可由两个元素生成，而统一证明任何射影特殊线性群可由两个元素生成一直到 1959 年才由两位大家阿尔伯特和汤姆逊完成。辛群也大约同时得到证明。而统一证明所有薛华荔群和扭型李型单群的是斯坦因伯格，他在 1962 年构造两个生成元是通过对角型元素和根元素，它们被称为斯坦因伯格生成元，但这两个元素一般都不是对合。这样一个自然的问题是，李型单群是否可由两个元素生成，其中一个是对合，另一个阶数$\geqslant3$。除了 A_n，C_n 在 20 世纪 50 年代已经证明外，$B_n(q)$ $(n\geqslant3$，q 奇数$)$ 到 1984 年才由瓦尔特证明，另外还有一些零星结果。

更进一步，除对合外，另一个生成元是否 3 阶元？这个问

题更难。除了射影特殊线性群之外，几乎没有什么结果。第一个特殊结果是辛可夫（Sinkov）于 1938 年证明的，他证明 PSL（2，2^n）是〈2，3〉生成的。这里〈2，m〉表示两个生成元的阶数分别为 2 和 m。

1969 年麦克比斯证明 PSL（2，q）（$q\neq 9$）是〈2，3〉生成的，而更难的情形 PSL（n，q）（$n\geqslant 25$）一直到 1987 年才由坦布里尼（Tamburini）所证明。值得注意的是，不是所有李型单群都能〈2，3〉生成，已经证明 PSU（3，3^2）和铃木群 ${}^2B_2$（q）（如阶不能被 3 整除）不可能〈2，3〉生成，显然这不是容易解决的问题。

散在单群的情况最近已经圆满解决。1984 年阿什巴赫尔和古拉尔尼克证明，每一散在单群都由一个对合和另外一个适当元素生成。但是，他们应用有限单群分类定理，这是有限单群分类定理的应用之一。这样，对单群来讲，2 生成元猜想得到完全证明，不过显然这不是一个统一的群论证明，因此，完全由纯群论来证明这个猜想仍是一个未解决的重要问题。

更进一步，1989 年沃尔达（Woldar）证明，除了 4 个群 M_{11}，M_{22}，M_{24}和 McL 外，其余 22 个散在单群均可〈2，3〉生成，而且这 4 个群不可能〈2，3〉生成。

除了这些单群之外，对称群 S_n，以及古典线性群 SL（n，q），Sp（$2n$，q），SU（n，q^2），Ω（n，q）它们分别是单群 PSL（n，q），PSp（$2n$，q），PSU（n，q^2），$P\Omega$（n，q）的完全中心扩张，它们也可由两个元素生成。

另外一种简单的生成元组是群由一组对合生成。当有限群由一个对合生成，当然是2阶循环群，由两个对合生成，只有二面体群。而定出所有三个对合生成的有限群，则是一个极复杂的问

题。近十多年对这个问题进行许多研究并取得一系列成果：

下列群可由三个对合生成(略去取得结果的作者名字，只列其论文发表的年代)

A. S_n	$n>3$	(1982)
B. A_n	$n>4$	(1982)
C. $SL(n, q)$	$n\geqslant3$	(1982)
D. $PSL(n, q)$	$q\neq3$	(1982)
E. $SU(2h, 2,)$	$h\geqslant2$	(1989)
F. $PSU(3, q^2)$	$q\neq3$	(1978)
G. $PSp(2n, q)$	$n>2$	(1982)
H. $PSp(4, q)$		(1989)
I. $\Omega(2n+1, q)$	$n\geqslant3$	(1990)
J. $\Omega^+(2n, q)$	$n\geqslant3$	(1990)
K. $\Omega^-(2n, q)$	$n\geqslant4$, q 奇	(1990)
L. $\Omega^-(4n, 2^m)$	$n\geqslant2$	(1989)
M. 铃木群$^2B_2(q)$		(1982)
N. 所有的散在单群		(1985)

4.6 群表示论

群论的一个基本工具是线性表示的观念。一个群 G 在一个域K 上的向量空间 V 上的线性表示是 G 到 V 的自同构群 $GL(V)$ 中的一个同态 ρ: $G\rightarrow GL(V)$。

这样一来，难以把握的抽象的群，包括抽象的元素，抽象群的乘法运算，以及抽象群的元素和子群之间关系与种种性质，都可以用具体的对象、具体的运算来表示或实现，这样大大有助于我们了解抽象群的各种性质，特别是它的结构，同时

由于它有许多具体的标记，我们就可以对它们加以区别和辨认，我们最熟悉的具体对象就是数与矩阵（线性变换），它们之间的运算我们都可以机械地去做，因此完全可以具体地操作。在有限群的研究中，特别是散在单群的结构确认中，用电子计算机计算特征标等等是常见的。这样一来，我们对不同的抽象群的掌握就更为具体了。

线性表示不仅计算比较方便，而且最重要的是它保持群的结构，也就是对于 g_1，$g_2 \in G$，总有

$$\rho(g_1)\rho(g_2)=\rho(g_1g_2)。$$

它还有比较大的灵活性，由于涉及域上的线性空间，我们对域以及其上线性空间及其子空间可以加以变化以抽取尽可能多的信息。实际上，通过表示，也就是使群 G 的每一个元素 s 实现为向量空间的一个自同构或非奇异线性变换，即 G 作用在向量空间上

$$\rho: G\times V\longrightarrow V,$$

$$(s, x)\longmapsto \rho(s)x, \quad x\in V, \ s\in G。$$

下面我们定义子表示和表示的直和。

通过表示 ρ，G 以 $(s, x)\longmapsto \rho(s)x$ 的方式线性地作用于 V 上。如果 W 是 V 的子空间，在这个作用下是稳定的，即 $G\times W\subseteq W$，那么 G 到 $GL(W)$ 中的映射 $s\longmapsto \rho(s)|W$ 称为 ρ 的子表示。我们称 ρ 是子表示 $\rho_j: G\longrightarrow GL(W_j)$ 的直和，如果 V 是 W_j 的直和。这样一来，对于某一个群 G，我们可以得到许多线性表示，我们也希望对这些表示加以分类。两个表示 $\rho: G\longrightarrow GL(V)$，$\rho': G\longrightarrow GL(V')$ 称为等价，如果存在 V 到 V' 上的同构 θ，使得对于所有的 s，$\rho'(s)=\theta\circ\rho(s)\circ\theta^{-1}$。一个表示 ρ 称为不可约的，

如果对于 G 在 V 上的作用，不存在任何 V 的不变子空间。也就是说，在所有表示当中，不可约表示是最基本的，也可以说是构成所有线性表示的原子或模块。因此，对每个有限群，求出所有的不可约表示是表示论的头等大事。一个线性表示 ρ：$G \longrightarrow GL(V)$ 称为完全可约表示，如每个不变子空间 $U \subset V$ 都有一个不变补空间 W，使 $V = U \oplus W$。对于表示空间具有某种结构，例如实欧氏空间及复埃尔米特空间，如果表示保持这种结构不变，就称为酉表示。酉表示是完全可约表示。由此可得出有限群的实和复表示都是完全可约表示。这样问题就归结为找出所有不可约表示。到底有多少不等价的不可约表示呢？可以证明：只有有限多不可约表示，它的数目正好等于有限群 G 的共轭类的数目。为了找出这些不可约表示，我们引入表示 ρ 的特征标。对于 $g \in G$，$\rho(G)$ 是一个矩阵，矩阵的迹 $Tr\rho(g)$ 就称为表示的特征标。重要的是，有限群的不可约复表示完全由其特征标所决定。

这样一来，决定 G 的所有表示问题简化为找到 G 的所有不可约特征标的问题。为此弗洛宾尼乌斯等人在 19 世纪末解决如下的基本问题：

①不可约（表示）特征标的刻画问题；

②不可约特征标的关系；

③特征标分解定理；

④不同构的不可约表示的数目。

对于这些问题我们有如下的结果：

①如果 χ 是一个不可约表示的特征标，则 $(\chi | \chi) = 1$。

②如果 χ 与 χ' 是两个不同构的不可约表示的特征标，则 $(\chi | \chi') = 0$（正交关系）。

③如果 χ_1，χ_2，…，χ_h 是 G 的所有两两不同的不可约特征标，则 G 的每个表示的特征标 φ，

$$\varphi = m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h,$$

这里 $m_i=(\varphi|\chi_i)$ 是非负整数，

$$(\varphi|\varphi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2。$$

我们有一个一般的定理：

如果 φ 是 G 的一个表示的特征标，则 $(\varphi|\varphi)$ 是一个正整数，且表示不可约当且仅当 $(\varphi|\varphi)=1$。

那么 G 有多少互不相同的不可约特征标呢？实际上这也就是 G 的不同构的不可约表示的数目，它正好等于 G 的共轭类的数目。

G 中的共轭类是按照 G 中元素某个等价关系（共轭）所划分的等价类。G 中两个元素 t 与 t' 称为共轭，如果存在 $s\in G$，使得 $t'=sts^{-1}$。在这种等价关系之下，G 划分为 C_1，C_2，…，C_h。设 $C(a)$ 表示 G 中含有 a 的共轭类，g_a 为 $C(a)$ 中元素的数目，我们有下面的正交关系成立：

$$\sum_{a\in G}\chi(a)\chi(a^{-1}) = \begin{cases} |G|, & \chi=\chi_0, \\ 0, & \chi\neq\chi_0。\end{cases}$$

这是对 G 中所有元素求和的。另一个是对所有不同的不可约特征标来求和：

$$\sum_{\chi}\chi(a)\chi(b^{-1}) = \begin{cases} |G|/g_a, & C(a)=C(b), \\ 0, & C(a)\neq C(b)。\end{cases}$$

表面上我们不太需要群的不可约表示的知识，实际上，还是有关系：每一个不可约特征 χ_i 对应一个不可约表示 ρ_i，其表示的向量空间维数 n_i 称为表示 ρ_i 的维数。所有不同构的不

可约表示的维数之间有如下关系：

$$n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2=g。$$

这个关系式足以决定一批不同构的不可约表示是否全部。另一个更困难的定理是每个 n_i 都整除 g，这就大大降低我们定出全部不可约特征标的难度。例如，对称群 S_3 共有 6 个元素，因此不可约表示的维数只可能是 1 和 2，或者

$$1+1+1+1+1+1=6$$

或者

$$1+1+2^2=6。$$

前者显然不可能（不可能两两不同还都正交），因此，它只有 3 个不可约特征标，不难得出其特征标表：

	1	t	e
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
θ	2	0	−1

同样可知对称群 S_4 共有 24 个元素，有 5 个共轭点，共 5 个不可约表示的维数分别为 1，1，2，3，3，

$$1+1+2^2+3^2+3^2=24。$$

特征标表为

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
χ_0	1	1	1	1	1
ϵ	1	−1	1	1	−1
θ	2	0	−2	−1	0
ψ	3	1	−1	0	−1
$\epsilon\psi$	3	−1	−1	0	1

从 S_3，S_4 的特征标表可以看出，它们的对称标都是整数，实际上这也是对称群特征标的普遍性质。

群特征标和群表示论从一开始就是群论研究最重要的工具，它在决定群的结构上起着重要作用，而且从 20 世纪 20 年代起，群表示论从数论到物理学的广泛领域显示其威力，从而成为一个相对独立的分支。从这时起，群表示论沿着四个互相有关的方向发展：

（1）对于有限群具体计算特征标。

（2）建立更一般的表示理论，特别是模表示及模特征标理论。

（3）研究表示的代数结构。

（4）把表示论的思想推广到一般群及其他代数结构之上。

我们分别论述如下：

（1）诱导表示理论。

虽然有限群的通常表示理论及特征标理论极为简单而漂亮，但具体求一个群的不可约特征标极为困难，特别当群是一个阶数很高的单群时，计算往往要求助于计算机。一个十分漂亮的想法也是弗洛宾尼乌斯发现的，即所谓诱导表示方法，它已经是决定有限群 G 的特征标最常用的方法。这个方法是从 G 的子群 H 出发，而 H 的线性表示已经知道，然后考虑由 H 的表示所诱导的 G 的表示。对于有限群，布劳尔的基本定理就是 G 的所有特征标都是由 G 的初等子群所诱导的 G 的表示的特征标的整系数线性组合，而初等子群根据定义是一个循环群和一个 p 群的直积。这个结果在有限群论和数论中 L 函数的研究上都有重要的应用。

具体造法也很简单，特征标无非是群的共轭类上函数，我

们可以简称为类函数。假设 H 是 G 的子群，已知 H 的类函数 f，则定义 G 的类函数 f' 为

$$f'(s)=\frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}f(t^{-1}st),\quad t^{-1}st\in H,$$

我们说 f' 是 f 所诱导的，记作 $Ind_H^G(f)$ 或简写为 $Ind(f)$，显然 $Ind(f)$ 是 G 的类函数。

对于 G 上两个类函数 φ_1，φ_2，可以定义内积

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\varphi_1(s^{-1})\varphi_2(s)。$$

弗洛宾尼乌斯在 1898 年发现著名的弗洛宾尼乌斯互反律

$$\langle\psi,\ Res\varphi\rangle_H=\langle Indx,\ \varphi\rangle_G,$$

其中 $Res\varphi$ 表示把 G 上的类函数 φ 限制在 H 上所得的类函数。

进一步我们可以考虑群的诱导表示。

如果 ρ：$G\longrightarrow GL(V)$ 是 G 的一个线性表示，ρ 在 G 的子群 H 上的限制是 H 的一个线性表示。如 ρ 是不可约的，一般它到 H 上的限制不一定还是不可约的。反之，设 σ：$H\longrightarrow GL(W)$ 是 H 的一个线性表示，设 L 是这些映射 g：$G\longrightarrow W$ 的向量空间，g 满足对于所有 $u\in H$，$g(su)=\sigma(u^{-1})g(s)$。对于所有的 $s\in G$，如果 $g\in L$，则函数 $r(s)g$：$t\longmapsto g(s^{-1}t)$ 属于 L，且 $g\longmapsto r(s)\cdot g$ 是 L 到 L 中的线性映射。于是，$s\longmapsto r(s)$ 显然是 G 到 L 中的一个线性表示，称为由 H 的表示 σ 所诱导的表示。

(2) 表示论与结合代数的联系。

在论述 1935 年由布劳尔开创的模表示论之前，我们先按历史顺序讲一下抽象代数学之母爱米·诺特的工作。她的思想方法是发现用简单的代数结构来表述复杂数学对象中的内在结构，这是一个需要非凡眼力的事情。按费特的话讲，她对于有

限群的结构理论没什么贡献，可是她却把数学最重要的工具群表示变成非凡的理论。她的技术在这方面也多有展现：

①集合化。

②一般化。

③研究结构。

这一次她把群表示论和结合代数联系在一起。实际上，早在1925年，她在德国数学联合会上的报告，已经指出群表示论的核心部分——群特征标理论与理想理论有关系。后来在1927—1928年度的讲课中又对这些过去认为互不相同的领域的统一性加以深刻的阐明和推广。结果她把以前的表示论从复数域直接推广到一般的域上。而表示论中的分裂域可以用“代数”的语言来刻画。反过来，分裂域与伽罗华群的交叉积成为研究代数结构的重要工具。1929年她发表题为“超复量和表示论”的重要论文，一下子把表示论由一个群论工具提高到一般数学理论的高度。她的思想奠定了一般表示论的基础。

首先，她把有限群在一个复向量空间 $GL(V)$ 的表示推广为群环 KG 在 K 模上的表示。对于有限群，我们可以考虑任意域上的群环 KG，其元素可形式写为

$$a_1g_1+\cdots+a_ng_n,$$

其中 $g_i\in G$，$a_i\in K$，它构成一个向量空间，即加法群，它的元素还有结合乘法

$$(ag)\cdot(bh)=(ab)\cdot(gh),\ g,h\in G,\ a,b\in K。$$

显然其乘法是结合的，且其积仍可写成上述形式，因此属于 KG。

其次，对于群 G 的每一个表示

$$T:G\longrightarrow GL(V),$$

她在 V 上定义一个 KG 模结构，对于

$$a=\sum_{g\in G}a_g g\in KG,$$

$$a\cdot v=\sum_{g\in G}a_g T(g)\cdot v,\quad v\in V。$$

反过来，每一个左 KG 模 V，定义一个表示

$$T: G\longrightarrow GL(V)。$$

不难证明两个表示等价当且仅当它们对应的 KG 模同构。

这样一来，表示论的中心问题，即把 G 的所有表示在等价意义下分成等价类以及分类的问题，以及把表示分解成为不可约表示直和的问题，都变成相应的群代数的模的结构与分类问题。当 K 为特征 0 的域或域特征 p 不整除 $|G|$ 时，按马什凯定理，在 KG 模均为半单的，即单模的直和，这蕴涵群代数是半单的。从而半单代数的结构定理均可直接应用，而有限群的常表示理论成为结构定理的自然推论。

(3) 模表示论。

当 K 为特征 p 的域，且 $p\mid|G|$ 时，这时表示出现较复杂的情形。这种情况下，布劳尔创造了模表示论。

早在布劳尔之前，狄克逊早在 1907 年已经考虑模表示论。他也首先明确指出 $p\mid|G|$ 的情形，表示论与通常表示论有本质不同。从诺特的观点看，这时群代数 KG 不是半单的。

1935 年布劳尔证明：有限群 G 在特征 $p>0$ 的域上的绝对不可约表示的个数等于 G 的 p' 类的个数。这里 p' 类即含有 p 正则元的共轭类，而 p 正则元则是 G 中一个元，其阶数与 p 互素。他还证明，模表示也有类似于常表示之处，即绝对不可约模表示由其迹函数也就是模特征决定。

很快，他意识到要得出进一步结果，非研究群代数不可。1937 年他同他的学生耐斯比特（Nesbitt, Cecil James,

1912—）合作写了两篇论文，引进模特征标及块（*block*）的概念，他还定义嘉当不变量 c_{ij} 和分解数 d_{ij}，证明两者之间存在关系

$$\sum_u d_{ui} d_{uj} = c_{ij}。$$

1941 年，他在与耐斯比特合作的论文中建立了模特征标的系统理论，特别是证明两个正交关系。1946 年布劳尔证明了块论的第一和第二主定理，但是在 10 年之后才发表，这时其它数学家已发表了证明。其后对于具有亏数 1 的块的特征标理论，他又研究小亏群情形，并由此得出单群结构的许多成果。1967 年他发表第三主定理的证明。

模表示理论是单群分类理论的重要工具之一，许多问题至今尚未解决。

5 无限群

从抽象群的观点看，有限群、阿贝尔群、置换群都不是真正的抽象群，它们都对抽象群加上一些附加条件。一般的群应该是无限群，但是从一开始，无限群的研究难以着手，因此我们又必须回来同已经知道的理论，特别是有限群论和阿贝尔群的理论取得联系，看看是否可能把它们的结果推广到一般情形。这种推广大多数并不成功，因此，我们总得找到无限群的固有的特殊之处，引进新的方法来研究。在这方面，用生成元与关系来表出群成为最重要的手段。这个领域通常称为组合群论。由于涉及无穷多元素，因此这种问题很不简单，它关系到重要的基础问题，也是数理逻辑中的判定问题。从历史上看，这部分理论与拓扑学的关系十分密切，几乎到了不可分的程度。最早的研究者如德恩（Dehn，Max，1878—1952）、维尔廷格（Wirtinger，Wilhelm，1865—1945）、梯采（Tietze，Heinrich，1880—1964）、尼尔森（Nielsen，Jakob，1890—1959）、莱德迈斯特（Reidemeister，Kurt，1893—1971）乃至范·坎本（van Kampen，E. R. 1908—1942）大都是对拓扑学做出贡献的数学家，其后才从代数学方面来研究。

其实早在庞加莱提出基本群之前，许多数学家已经在研究无限群，不过那时既不谈群，也对这些群的结构问题没有特别

的认识。他们只关注比较具体和实际的问题，这方面的群有：

(1) 晶体群，即格子群；

(2) 模群，即复平面上整数系数分式线性变换群；

(3) 庞加莱引进的富克斯群和克莱因群；

(4) 一些整数矩阵群，特别是典型群。

除此之外，无限群另一大方面是连续群，它们先由若尔当在1868年引入运动群，后由李在1874年引入李变换群，但是它们并不纯粹是群，而且李的有限连续群和无限连续群只是讲群流形和维数，而不是群的阶。另外，1881年庞加莱在研究自守函数时，也引入连续群的离散子群问题，它在近40年有非常大的进展。近20年由于拓扑和几何的发展，无限群论的研究又高涨起来，特别是格洛莫夫（Gromov, Mihail, 1943—）在1986年引入双曲群和比双曲群更一般的自动群（*automatic group*），它们对几何有重要作用，自动群还对计算机科学和形式运算有重要意义。

无限群的另一方面是沿着有限群论推广的方向进行抽象结构的研究，这方面在苏联积极地进行。在十月革命前，O·施密特就已经从事这方面的工作，其后他也是苏联代数界的领袖人物。他的一个重要贡献是在1926年把德国数学家雷马克（Remak, Robert, 1888—）1911年证明的有限群直积分解的同构定理推广到一般的（无限）群上（当然具有一定的链条件），这是从有限群过渡到无限群的标准推广。其后直积分解定理又由库洛什（Kurosch, Alexe, 1908—1971）等人进一步推广。沿着这个方向从20世纪20年代起，无限阿贝尔群、无限 p 群、无限幂零群及无限可解群等的研究逐渐开展，这时对于有限群中自然的条件，如群的阶数，元素的阶数，西洛子

群等在一般无限群中一般不存在，为了处理无限群，我们需要加一些新的条件，使我们能够更接近比较熟悉的群或较为成熟的一些特殊群理论。

我们要加上什么条件呢？

(1) 有限性条件：由于我们对无限群的认识往往要通过生成元及关系具体表出，因此最重要的一类条件是生成元及关系子的数目有限，由此得出有限生成群及有限表出群。

元素阶的有限性与某些子群的有限性也常用，特别是 p 群定义中只对元素的阶加以限制，即每个元素的阶均为 p 的幂。

(2) 结构性条件：主要是子群或正规子群等满足链（升链或降链）条件或相应的极大或极小条件，它们往往也是有限性条件。另外还有对合成因子、主因子等加的条件。

(3) 局部性条件：对于群中所有子群、所有正规子群、所有商群或其它类型的子结构所给的条件。

(4) 构造性条件：通过构造它们可由某些简单的群生成或扩张而得，或者属于一定的类和簇。

5.1 自由群与自由积

应该说，自由群是无限抽象群的第一个研究对象。有限群都是不自由的，也就是它的阶数受到限制，对于有限群的任一元素 x，$xx=x^2$，$xxx=x^3$，不能无限制的延续下去，总有一个 n，使 $x^n=1$。对于无限群就没有如此限制。另外，无限群的生成元数目也没有限制，而且它们构成新的元素的方式也没有限制。若 a，b 是群中两个不同元素，且 $a\neq b\neq ab\neq 1$，那么由 a、b 出发就可以构成无穷多个元素。例如 ab，ba，

aba，bab，$abaab$，…。这无穷多个元素之间如果没有任何关系，例如 $abaab=bab$，自然它们的元素之间就没有任何平凡的约束，它们是自由的，这样的群也就是自由群了。不过群的元素之间也不是绝对的自由，它们也有着平凡的约束，即存在么元 1，$1a=a$，$1\cdot 1=1$，以及存在逆元 $aa^{-1}=1$。

要研究抽象群，首先要符号化。对具体群来说，它是半抽象化，而对抽象群来说，它是半具体化。怎么半具体化呢？那就是把群 G 中的元素表示成为字，好像英文字由字母组成。我们把 G 中所有的字称为 X 字，其中 X（还有 X^{-1}）起着字母表的作用。G 记作 gpX。

X 字只不过就是 $X\cup X^{-1}$ 中元素的一个序列。这里 X^{-1} 就是集合 $\{X^{-1}|x\in X\}$，因为 X 在群 G 中，所以每 X 字

$$w=x_1^{\epsilon_1}\cdots x_n^{\epsilon_n},$$

按照字母顺序相乘之后，乘积 g 仍然在 G 中，这时我们记作

$$w\underset{G}{=}g。$$

一个 X 字

$$w=x_1^{\epsilon_1}\cdots x_n^{\epsilon_n}\ (x_i\in X,\ \epsilon_i=\pm 1)$$

称为既约的，如果相邻的字母 x_i 与 x_{i+1} 不相互是逆元。

如果 $G=gpX$ 且每个非空既约 X 字

$$w\underset{G}{\neq}1,$$

则称 X 为 G 的自由生成元组，也称 X 自由生成 G 或 G 在 X 上是自由的，这时 G 称为自由群。如果 G 是自由群，则两既约 X 字在 G 中取相同的值当且仅当这两个字恒等。因此，自由群也就是元素以及元素之间没有任何约束，也没有任何关系（当然，除去 $xx^{-1}=1$ 这种基本的关系之外）。显然，对于任何集合 X，都存在一个由 X 自由生成的自由群 G，称为 X 上

的自由群。假如 G 在 X 上自由也在 Y 上自由，则

$$|X|=|Y|。$$

这个共同基数称为自由群的秩（*rank*），这是自由群的不变量。很明显，自由群的秩可以是有限数或无限数，如果是有限，则称自由群是有限生成的。有限生成当然是一个重要的有限性条件。

虽说有限生成自由群是个有限性条件，但是它也同任何自由群一样是无限群。首先它是无挠的，即每个非么元元素都是无穷阶元，也就是不存在正整数 n，使 $x^n=1$，因此即使自由群 G 由一个元素 x 生成，它也含有无穷多元素 x，x^2，x^3，…。并且，如果 $x^m=y^m$，则必定 $x=y$。这说明自由群是具有唯一 n 次根的群。

这么看来，自由群实际上是比较简单的一种群，不过它具有一个重要的万有性质：

如 G 是 X 上的自由群，H 是任意群，则对任何映射

$$\alpha: X \longrightarrow H,$$

存在唯一同态

$$\bar{\alpha}: G \longrightarrow H,$$

它是 α 的扩张。换句话说，每个群都是某自由群的因子群。这个性质也是自由群的刻画性质。

自由群的结构性质中最重要的是尼尔森—施莱尔定理：自由群的任何子群也是自由群。这定理对有限秩自由群由尼尔森在 1921 年证明，1927 年施莱尔证明一般情形，也就是去掉有限生成的假设。这个重要的定理后来又有许多新证明，特别是几何的证明。第一个几何证明是白尔（Baer，Reinhold，1902—1979）在 1936 年给出的，1970 年塞尔用群作用于树

(*tree*) 上的方法给出一个漂亮的几何证明。

由于自由群定义比较宽泛，不足以详细描述各种各样的群，我们把它加以推广，推广的方式有许多。一种是加进一些关系，成为有限或递归的表出群；一种是引进一些构造方法，得出新的结构。自由（乘）积就是后面的一种。

1924 年，阿廷引入如下自由积：

若 $\{A_i | i \in I\}$ 是一族群，A_i 的自由积是一群 P 和一族群同态

$$j_i : A_i \longrightarrow P,$$

使得对于任何群 G 和任何一族同态

$$f_i : A_i \longrightarrow G$$

存在唯一同态

$$\varphi : P \longrightarrow G,$$

它满足对每 i，$\varphi j_i = f_i$。自由积 P 可记作 $\underset{i \in I}{*} A_i$，显然同态 j_i 是映入，我们称它为嵌入。

根据这个定义，自由群无非是无限循环群的自由积。

对于给定一族群 $\{A_i | i \in I\}$，总存在一个自由积，任何两个自由积都同构，而且自由积中的每元素 g 都具有唯一因子分解，即

$$g = a_1 \cdots a_n。$$

对于自由积，苏联数学家库洛什在 1934 年推广自由群的子群定理：

库洛什定理 自由积的子群也是自由积。

自由积 $G = \underset{i \in I}{*} G_i$ 的每个子群可分解为一些子群的自由积，每个子群或者与某个 G_i 共轭，或者是无限循环群。

子群定理有许多应用，例如白尔和 F·W·列维（Levi,

Friedrich Wilhelm, 1888—1966）证明一个群不可能同时非平凡地表示为直接积和自由积。另一个重要定理是苏联数学家格鲁什柯（Grushko, Igor, 1912—1941）在1940年证明的：

格鲁什柯定理 如F是有限生成自由群，φ是F到自由积$G=\underset{i\in I}{*}G_i$上的同态，则$F=\underset{i\in I}{*}F_i$满足$\varphi(F_i)=G_i$。

对于有限生成群G，我们用$\mu(G)$表示其生成元的最小个数，这样，苏联数学家格鲁什柯在1940年证明：若A和B是有限生成群，则

$$\mu(A*B)=\mu(A)+\mu(B)。$$

它不难推广到有限多自由积情形。

无限群论及其应用需要两类重要的构造，一是具有融合（*amalgam*）自由积，它是施莱尔在1927年首先引入的，一是HNN构造。它是G·希格曼、B·H·诺伊曼（Neumann, Bernhard Hermann, 1909—）和汉娜·诺伊曼（Neumann, Hanna）在1949年引入的，其名称来自他们姓的首字母。

具有融合的自由积，为了简单起见，我们只考虑两个群G_1，G_2，它们是有限表出群$<x_1|R_1>$，$<x_2|R_2>$，各具有两个同构的子群A_1，A_2及同构$\phi: A_1\longrightarrow A_2$，则$G_1$，$G_2$的具有融合的自由积定义为群$G=G_1*G_2$，具有表出$<X_1\cup X_2|R_1\cup R_2\cup\{a=\phi(a)|a\in A_1\}>$。它可以记作$G_1*_{\phi}G_2$。

不难证明，具有融合的自由积存在且唯一，而且每个元素具有正则表示。

G·希格曼、B·H·诺伊曼和汉娜·诺伊曼1949年在著名的论文中利用融合积证明一些重要的嵌入定理：

若 G 是群，φ 是 G 中子群 A、B 的同构，$\varphi: A \longrightarrow B$，则存在一群 $\overline{G} \geqslant G$ 和 $t \in \overline{G}$，使得对任何 $a \in A$，

$$\varphi(a) = t^{-1}at。$$

由此证明，每无挠群可嵌入在一个群 $\overline{G}$ 中，其中所有非平凡元素均共轭，特别 $\overline{G}$ 也是无挠而且是单群。每个可数阶群 G 可嵌入具有两个生成元的群 $\overline{G}$ 中，而且对于每 $n \geqslant 1$，$\overline{G}$ 包含一个 n 阶元素，当且仅当 G 包含一个 n 阶元素。由前一个嵌入定理可得到 G 的 *HNN* 扩张。*HNN* 扩张定义为把 t 添加到 G 中所生成的群（t 称为 $\overline{G}$ 的稳定元素）。

HNN 扩张与融合自由积具有一定相似性，它们都应用一对同构的子群，只是融合积使两个子群恒同，而 *HNN* 扩张使两个子群共轭，这种观点对于以后的研究很重要。

HNN 扩张可推广到多个稳定元素上面，得到广义 *HNN* 扩张 $\overline{G}$，而且 G 总可以嵌入到这样的广义 *HNN* 扩张 $\overline{G}$ 内，同时 $\overline{G}$ 的元素具有某种正规形式。

布恩具体造有限生成群但不是有限表出群。例如，若 F 为具有基 $\{a, b\}$ 的自由群，其换位子群 F' 为具有 $\{w_1, \cdots, w_n, \cdots\}$，则

$$G\ \{a, b, p \mid p^{-1}w_np = w_n,\ n \geqslant 1\}$$

是有限生成群，但不是有限表出群。

B·H·诺伊曼在 1953 年进一步证明存在不可数无穷多互不同构的有限生成群，这样我们的注意集中在有限表出群上。

5.2 有限表出群

有限表出群的研究实际上主要来自几何，特别是拓扑学以

及分析和算术的研究。它的主要来源是自守函数论，其最简单情形是在复数平面 C 的分式线性变换

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

下不变的函数。在这方面做出贡献的有德国数学家施瓦茨、富克斯、肖特基（Schottky, Friedrich Hermann, 1851—1935）等人，而做出决定性贡献的则是克莱因和庞加莱。他们的奠基性著作都是在1882—1883年发表的。

但是，早期不连续群的理论并没有刺激群的表出问题，当时不连续群的定义是通过复平面的保角映射或者 2×2 矩阵实现的。而第一个向群的表出方向迈出重要一步的是克莱因的学生代克。他在1882年的论文中明确提出用分析（实际上是组合的）语言来代替几何的描述。他在第一节的题目中就显示出这个意图："定义一个群作为研究的出发点。"他进而通过生成元和关系定义群。这不仅是一种方便的描述，而且作为一种特殊的符号化，向抽象群论迈出重要的一步。而对抽象群来说，它又是一种可操作的具体表示。

这种简洁的方式立刻引起注意，对于过去用置换和矩阵定义的有限群，现在也开始用生成元和关系来表出。这立即显示出表出法的优越性。代克在1883年给出两个最小阶的非交换的有限单群 A_5（60阶）和168阶群的表出式。伯恩塞德和弗里克（Fricke, Robert, 1861—1930）独立在1899年给出504阶群的表出式。伯恩塞德在1897年给出所有对称群的表出式。后来的群论发展显示出表出式的威力。当然最主要用途还是在无限群论及其应用方面。

一连串的几何和拓扑的工作把群的表出式推向前台。首先

是庞加莱1895年在他的组合拓扑的奠基性论文中提出基本群的概念，1904年他提出庞加莱猜想，虽至今没有解决，却可以转化为一个等价的群论问题。1905年，奥地利数学家维尔廷格引入纽结群的概念，这也是一种基本群。1908年，梯采证明，有限维紧、弧连通流形的基本群是有限表出群。这就直接揭示出有限表出群的根本重要性，从而把有限表出群推向前台。而系统深化有限表出群理论的则是希尔伯特的学生德恩。严格讲，德恩不是一位代数学家，而是一位几何学家。他在1900年就给希尔伯特第3问题举出一个反例。1907年他为德国《数学百科全书》撰写位置分析的综述，他还是一位十分博学的数学史家。因此，他很快就能够把一个领域中关键的问题提出来。

德恩承认庞加莱的基本群是他研究有限表出群的动机，他一共发表4篇论文，分别于1910年、1911年、1912年、1914年出版。1911年的论文完全是讲有限表出群的，其中提出三大问题：

（1）字的问题。由有限表出群 G 的任何由生成元表出的字，找出一个方法能在有限步内判定它是否等于么元。

（2）共轭问题。给定 G 的两个元素 s 和 t，找出一个方法判定它们是否共轭，即是否存在 $u \in G$，使得

$$s = u^{-1}tu。$$

（3）同构问题。给定两个群，判定它们是否同构（以及一种给定对应是同构）。

第三问题梯采在1908年也已提出，它们具有明显的拓扑学背景。

经过第一次世界大战及战后的发展，德恩把自由性定理

(*Freiheitssatz*) 作为博士论文题目给他的学生马格努斯(Magnus, Wilhelm, 1907—)。虽然他本人考虑过这个问题，但他的档案中没有资料显示他写下这个定理的证明或摘要。1930 年马格努斯在他的博士论文中完成了这个定理的证明。

自由性定理 G 为有限表出群具有一个关系子

$$G=\langle x_1, \cdots, x_q \mid r\rangle。$$

假设 r 是循环可约的（即 r 中首字母与末字母彼此不是互逆元素），假如每个 $x_1, \cdots, x_q$ 都出现在 r 中，则 $\{x_1, \cdots, x_q\}$ 的任何真子集自由生成一个自由群。

接着马格努斯在 1932 年取得字的问题的突破。他证明具有一关系子的群，字的问题有肯定解。

但是，对一般情形结果却是否定的。

1954 年，苏联数学家 P·S·诺维科夫证明字的问题不可解定理，存在有限表出群具有不可解的字的问题。而且有不可解字的问题的群也有不可解的共轭问题。诺维科夫的证明运用非常复杂的组合技巧。后来美国数学家布恩（Boone, William Werner, 1920—1983）在 1959 年，英国数学家布里顿（Britton, Lucy, 1927—1994）在 1961 年给出新的简化证明。

诺维科夫的结果引起另一位苏联数学家阿基延（Adian, Sergei, 1931—）的注意，他大大推动了有限表出群的一系列否定结果的证明，他引起所谓马尔科夫性质：有限表出群的某种代数性质（即在同构下保持的性质）称为马尔科夫性质，如果

①存在一个有限表出群具有这种性质；

②存在一个有限表出群不能嵌入一个具有这种性质的群(即不同构该群的子群)。

阿基延在 1957 年，以色列数学家拉宾（Rabin，Michael）在 1958 年证明：如 M 是马尔科夫性质，则不存在算法能判定是否一个有限表出式能定义一个具有 M 性质的群。

马尔科夫性质包括：

①平凡性，即字等于么元

②有限性

③交换性

④具有可解的字的问题

⑤单性

⑥自由性

⑦幂零性

⑧可解性

⑨无挠性

等等。由此可以推出有限表示群的同构问题不可解。因此，这个定理给我们一个相当悲观的结论，即对群的几乎任何性质，判定任何有限表出是否定义一个具有该性质的群都是算法不可解的。

1959 年，鲍姆斯拉格（Baumslag，Gilbert）、B·H·诺伊曼证明有限表出群的元素和子群的类似定理：

（1）存在有限表出群 G，使得不存在有效的步骤来决定由 G 的生成元组成的字表示：

①G 的中心中的元素；

②与 G 给定元素互换的元素；

③一个 n 次幂，n 为整数 >1；

④一个其共轭类有限的元素；

⑤G 中一个给定子群的元素；

⑥一个换位子；

⑦一个有限阶元。

(2) 设 P 为群的代表性质，假设

①存在一个有限表出群具有性质 P；

②存在一个整数 n，使得如 $r \geqslant n$，不存在 r 秩自由群具有性质P，则存在有限表出群 G，使得不存在算法能决定 G 的任何有限多元素集合是否生成具有性质 P 的子群。例如，存在有限表出群 G，不存在算法能够判定任何有限生成子群是否有限群。

5.3 伯恩塞德问题

1902 年英国的群论大家伯恩塞德提出一个问题：如果一个有限生成的群 G 中每个元素均为有限阶的，那么这个 G 是否为有限群？这个问题称为一般伯恩塞德问题。

这是一个提法极为简单，但是又难以解决的大问题，它的重要性也由詹德勒（Chandler，Bruce）和马格努斯在《组合群论史》一书中所讲的，伯恩塞德问题对组合群论的影响足可以同费尔马大定理对代数数论的影响相提并论。他们讲这话时，费尔马大定理远未解决，但推动代数数论的作用有目共睹。但是伯恩塞德问题却很少为人所知。一直到 20 世纪 90 年代伯恩塞德问题取得重要突破，其中一位俄国数学家齐尔曼诺夫（Zelmanov，Efim I. 1955—）荣获 4 年一次的在国际数学家大会上颁发的菲尔兹奖，这个问题才引起数学界的注目。

伯恩塞德是现代群论的奠基人之一，他取得一系列漂亮结果，也提出不少简洁而明快的问题。越是简明，这类问题越不

容易解决，因为它们很难与其它领域挂上钩。

G 是有限生成群，每元素都是有限阶，G 是否有限群？肯定回答例如 G 是阿贝尔群。1964 年苏联数学家高洛德（Golod, A. S.）否定回答：对每个素数 $p\geqslant 2$，存在一个有限生成单群，它是无限群。这是他同沙法列维奇的数论研究的副产品。1972 年，苏联数学家阿利奥琴（Aliochin, S. V.）用两个有限自动机阶 p 和阶 p^2 构造反例。1983 年古普塔（Gupta, Naresh）和希德基（Sidki）构造一个最简单的反例，他们证明：对每个素数 $p\geqslant 3$，都存在 p 群，具有两个 p 阶生成元。更进一步，1989 年，他们构造一个子群有两个生成元，一个是 2 阶，另一个是 4 阶。以上的群都可看成在某些正则树上忠实地作用的群。1986 年格洛莫夫引入双曲群，其中引进方法构造出各种一般伯恩塞德问题的反例，由此产生大量否定结果。例如任何负曲率流形的基本群均有一商群，它是无限挠群。

首先我们考虑相对容易的有界的伯恩塞德问题。设 $B(n, e)$ 表示 n 个生成元的群，其所有由生成元组成的字 x，都满足 $x^e=1$，这里 n 和 e 都是固定的。伯恩塞德问题是问：对于那些 n 和 e，$B(n, e)$ 是有限群。

显然，对有限 n，$e=1$，$e=2$，$B(n, 1)$，$B(n, 2)$ 是有限群。伯恩塞德证明，$e=3$ 时，$B(n, 3)$ 也是有限群。1904 年法国一位自学的数学家德·塞居叶证明 B（2, 4）是有限群。

其后 F·列维和范·德·瓦尔登证明：

$|B(n, 3)|=3^k$，

其中 $k_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$。

1940 年苏联数学家萨诺夫（Sanov, Ivan, 1919—）证明 $B(n, 4)$ 是有限群。1957 年 P·浩尔和 G·希格曼以及 1957 年 M·浩尔独立得出 $B(n, 6)$ 是有限群，并给出它们的阶。

1959 年 P·S·诺维科夫宣称他证明对于 e 是大奇数时，$B(n, e)$ 是无限群，不过他的证明到 1968 年才和阿基延合作发表。详细的证明发表在 1975 年由阿基延单独撰写的专著中，共 335 页。除了有限单群的分类定理之外，超过所有大定理的证明。在这个专著中，他给出了一个界，对于 $n \geqslant 2$，e 是奇数 $\geqslant 665$，$B(n, e)$ 是无限群，他的证明极其复杂难懂。1982 年苏联数学家奥尔山斯基（Ol'shanskii, Aleksandr）给出一个简单的几何证明，他的 e 是奇数 $\geqslant 10^{10}$。对于偶数指数，直到最近才取得突破。俄国数学家 S·伊凡诺夫（Ivanov, S.）在 1994 年证明 $B(n, 2^k m)$ 是无限群，其中 $k \geqslant 48$，$m \geqslant 1$ 是奇数。

狭义伯恩塞德问题也称限制性伯恩塞德问题：对于 d 个生成元，具有有界指数 n 的有限群是否其阶有界。实际上也就是讲，这种有限生成的有限群是否只有有限多个。

这个问题在 20 世纪 30 年代已流传过，但是首先是马格努斯 1950 年在论文中正式提出来。很快，1956 年 P·浩尔和希格曼就把狭义伯恩塞德问题归结为素数幂指数情形和有限单群的施莱尔猜想。1959 年苏联数学家科斯特里金（Kostrikin, Aleksei, 1929—）对素数指数肯定解决狭义伯恩塞德问题，他说，即使这个情形也决不简单，而且不像人们期望的那样，能自动推向素数幂指数问题的解决。他发表的论文中仍有许多错

误，一直到 1979 年完全解决，最后写到他的专著（1986）中去。这本专著的出版推动了专家对这问题的兴趣。1990 年苏联数学家齐尔曼诺夫对奇素数幂指数肯定解决狭义伯恩塞德问题。1991 年对 2 幂指数同样得到肯定结果。他的结果加上有限单群分类完成及施莱尔猜想的证明就完全肯定地解决狭义伯恩塞德猜想。

下一步当然是对于这些有限群求出其上界，不过现在的结果还是大得惊人。值得注意的是，这个证明用到的知识和技巧并不是群论方面，而是李环理论。

5.4 无限幂零群和可解群

对于抽象群，我们失去了有限群具有的许多数值不变量，例如群的阶数和元素的阶数，这给我们了解抽象群造成困难。为了克服这些困难，我们仿照有限群一些自然满足的条件把它们推广到一般的群上。这些条件主要包括两类：一类是有限性链条件；一类是直积分解。

在代数结构的研究中，有限性链条件同极大条件、极小条件有关。

先讲各种有限性链条件，我们有下面的子群序列：

（1）正规列：G 的子群列

$$G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n=\{1\},$$

其中 G_i 是 G_{i-1} 的正规子群，称为 G 的正规列。

G 的两个正规列

$$G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n=\{1\},$$

$$G=H_0 \triangleright H_1 \triangleright \cdots \triangleright H_m=\{1\}$$

称为同构，如果 $m=n$，且诸商群

$$G_0/G_1,\ G_1/G_2,\ \cdots,\ G_{n-1}/G_n,$$
$$H_0/H_1,\ H_1/H_2,\ \cdots,\ H_{m-1}/H_m$$
按照适当的顺序分别对应同构。1928 年施莱尔证明：G 的两个正规列可以通过加细而同构。

（2）合成列：G 的正规列

$G=G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \cdots \trianglerighteq G_n=\{1\}$，其中对每一 i，G_{i-1}/G_i 均为单群，称为 G 的合成因子。

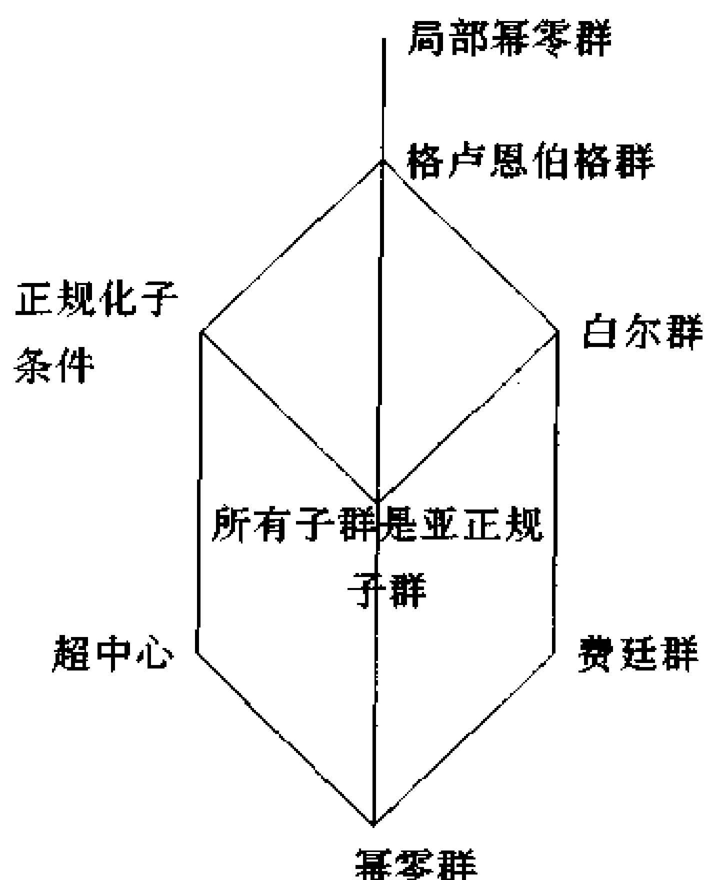
若尔当—荷尔德定理 一个群的任何两个合成列都等价。

若尔当在 1868 年证明，有限群的合成因子的阶只依赖于 G，而荷尔德在 1889 年证明，合成因子本身（到群同构之下）也都只依赖于 G。这定理实际上可以看成唯一因子分解定理。

（3）主组成列：G 的正规列
$$G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n=\{1\}$$
且每个 G_i 还是 G 的正规子群，而且在 G_i，G_{i-1} 之间不存在 G 的其它正规子群。G_i/G_{i-1} 称为主因子。

我们对有限阿贝尔群和幂零群的结构知道得很清楚，但是对于无限阿贝尔群，我们都所知甚少。因此，对于幂零群，许多对有限群成立的条件，对无限群不成立。典型的是有限 p 群是幂零群，但无限 p 群不一定是幂零群，甚至不一定是局部幂零群。因此，我们有必要对幂零群和可解群的概念做一些推广。

下面我们简述幂零群的 7 种推广，如图所示：



这 8 种群的类互相有所区别，处于上面的群一般不一定具有连线下方的群的性质，例如局部幂零群不一定幂零，但下方的群类一定真包含在上方的群类当中，其中最重要是局部幂零群。

所谓局部幂零群，就是指每有限生成的子群都是幂零的群。它虽然“局部”是幂零的，但是，整体上不一定是幂零群。实际上由一族幂零群的直积，只要其直积因子的幂零类是无界的，则其直积是局部幂零而不是幂零群。

局部幂零群的子群和同态象也是局部幂零群。

局部幂零群的结构类似于阿贝尔群。若 G 为局部幂零群，则 G 中所有有限阶元素形成一个完全不变子群 T（G 的挠子群），使得 G/T 是无挠群，T 是 p 群的直积。

类似于费廷定理，两个正规幂零子群的乘积也是幂零子群。赫什（Hirsch）和普劳特金（Plotkin，Boris，1925—）证明局部幂零群也有同样情形：若 G 的子群 H 和 K 是其正规局部子群，则乘积 HK 也是局部幂零子群。这样 G 中存在唯一极大正规局部幂零子群，称为赫什一普劳特金根基。

局部幂零群的结构还具有如下性质：

(1) 白尔一麦克雷恩定理

局部幂零群的极大子群是正规子群，即

$G' \leqslant \varphi (G)$。

对于有限群，由 $G' \leqslant \varphi (G)$ 可推出 G 是幂零。但一般由 $G' \leqslant \varphi (G)$ 并不能推出 G 是幂零，也不能推出 G 是局部幂零。

(2) 马力茨夫一麦克雷恩定理

局部幂零群的主因子都是中心子群，即包含在群 G 的中心 $C (G)$ 中。

(3) 麦克雷恩（Mclain，D. H.）证明：如局部幂零群 G 对正规子群满足极大条件，则 G 是有限生成幂零群。局部幂零群对正规子群满足极小条件，当且仅当它是有限多切尔尼可夫（Cernikov，Sergei，1912—）p 群。

正规化子条件是指所有真子群小于其中心化子，普劳特金证明满足正规化子条件的群是局部幂零群，反之，麦克雷恩群 $M (Q, F)$ 是局部幂零群但不满足正规化子条件。

这里不能介绍所有的推广，只是略讲其中两种：

(1) 白尔群，即每循环子群均为Ⅱ正规子群。对于一类白尔群，我们有如下结构定理：如 G 是对正规子群满足极小条件，则 G 是幂零群，其中心具有有限指数。

(2) 费廷群，即 $G = FitG$。

费廷群有如下的刻画定理：群 G 为费廷群，当且仅当每个元素包含在一个正规幂零子群之中。每费廷群是白尔群。

局部可解群更进一步推广是恩格尔（Engel, Friedrich, 1861—1941）群，它来自李代数，对于解决伯恩塞德猜想至关重要。

对于可解群，我们相应可有局部可解群，它的研究要比局部幂零群困难得多，因为其有限生成群未必满足。

对于无限可解群，我们仿照诺特的链条件提出相应的极大条件，来研究有限生成的可解群。

赫尔希（Hirsch, K.）从 1938 年到 1954 年研究这种类型的群，发表了 5 篇论文，他得到许多结果，其中包括 1938 年的定理。这样的群 G 具有一个子群的升链

$$G_0 = \{1\} < G_1 < G_2 < \cdots < G_n = G,$$

使得每个子群是下一个子群的正规子群，且商群 G_{i+1}/G_i 均为循环群，$i = 0, \cdots, n-1$。P·浩尔把这种群称为多循环群（*Polycyclic group*）。

多循环群的类在形成子群，同态象和扩张是封闭的。1951 年马力茨夫，最后奥斯兰德（Ausland, Louis, 1928—1997）和斯万（Swan, Richard, 1933—）独立于 1967 年得出多循环群类与所有 $n \times n$ 整数矩阵的可解群类重合。

6 李群

6.1 李群的发展历史

19 世纪 70 年代，李在构思所谓李群时，正是几位数学大师热衷于探讨数学中崭新而又有用的“群”的观念的时期。他们中间首先是若尔当，然后是克莱因和李，最后是庞加莱真正把群的威力显示出来。但是，他们那个时代对于抽象的概念并不太感兴趣，结构的观念更是十分模糊，除了非常繁复的表示之外，对于群和流形之类的基本对象干脆就没有什么干净利落的表示方法。另外除了具体的运算之外，也难以用概念去驾驭像李群这种比置换群远为复杂的李群。尤其是李的实用主义态度难以对新的方向考虑和适应，这样就失去发展理论的主导力量。

只有我们回过头来看这 100 多年错综复杂的历史，我们才能理清这个伟大理论的来龙去脉。

李群的发展历史大致可分为四个时期，每个时期都有自己的方向延续到后世。

1. 李的连续变换群时期（1871—1900）

李的思想来源主要是他前两个时期的工作：1869—1871 年的几何时期，他研究线复形和直线到球面的映射，他发现切触变换的概念。1872—1873 年的偏微分方程时期，特别是考

虑两个偏微分方程组彼此可通过切触变换互相变换的条件。这些切触变换形成一个群，现在看实际上是伪群。

在这两个时期工作的基础上，他形成了一个连续变换群的观念，而且他的主导思想完全是把伽罗华在代数方程上的工作搬到微分方程上来。另外，不变式和微分不变式的观点也影响他的方向。

他的研究方向为他的学生恩格尔所坚持，他的工作还影响了如史图迪（Study，Eduard，1862—1930）和布劳威尔等人。但李去世后这个方向很快就衰微了，一直到本世纪 70 年代，从变换群的观念研究微分方程又重新活跃起来。

2．基灵（Killing，Wilhelm，1847—1923）和 E·嘉当时期（1888—1925）

基灵曾是德国中学教师，主要兴趣是几何，他完全不受李的影响，只着眼于群本身。他完成了从变换群到局部李群研究的过渡，把研究代数化，成为独立的代数结构。但是由于他的主要对象是复和实的有限维李代数结构和表示理论，李群整体的研究实际上尚属空白。

由于他们的工作，李代数后来发展成为一个独立的领域，它们的研究完全不涉及李群，更不涉及变换群及其种种应用，成为纯代数的一个分支。

从本世纪初起，对于李代数的研究有三个方向：

（1）对半单李代数寻求简化的研究方法。

对可解李代数及幂零李代数的进一步研究。

（2）向一般域推广。

①从代数封闭域到非代数闭域；

②从特征 0 到特征 p；

(3) 向无穷维推广。

无穷维李代数早在1909年已由E·嘉当开始研究，但只有从1968年起卡茨（Kac, Victor, 1943—）和穆迪（Moody, Robert, 1941—）独立发现所谓卡茨—穆迪代数后，才形成热潮，并且纳入数学物理大统一纲领之中，与数学及物理许多领域有着多方面的联系。

3. 外尔—E·嘉当时期（1925—1955）

这一时期的主要特点是整体李群开始成为主要的研究对象。在这之前由于缺乏流形的概念和拓扑群的概念以及组合拓扑工具不够成熟，李群的研究大都局限于局部李群。尽管李等人从变换群的角度对于典型群的整体性质也有初步认识，但完整的观念只有外尔在1925年才正式提出。实际上，现代的解析流形观念的萌芽已显示在外尔1913年出版的《黎曼面的观念》一书中。一般拓扑学的观念，特别是紧的观念业已成熟。1927年，施莱尔建立了抽象拓扑群的理论，这些都为一个完整而独立的整体李群观念产生奠定基础。另一方面，李群如何构造表示的技术也已经在1924年由舒尔（Schur, Isaac, 1875—1941）得出，这就为紧李群的表示指出了方向。

外尔这种整体观点的转换把李群从局部的代数的观点中解放出来，与拓扑学和微分几何联系在一起。这促使E·嘉当建立起半单李群及其相应的对称空间理论。更进一步，李群的齐性空间成为拓扑学和多复变函数论许多研究对象的典型，其中包括球面、射影空间、格拉斯曼流形以及多复变函数论中的有界对称域。而且它们的拓扑及表示论在纤维丛特别是示性类理论中起着决定性作用。这一下子使李群真正成为数学的中心。

E·嘉当有李代数的一套工具在手，建立李群的拓扑不变

量与代数不变量的关系以及用不变微分形式来表示实（上）同调，这直接促使德·拉姆理论的产生。这种拓扑学与代数的结合，同时也是李代数上同调的来源。李代数上同调和群的上同调一起成为同调代数学这一新兴代数领域的原型。

4．扩展与多样化时期（1955年—）

到20世纪50年代中期，复和实的李群、李代数理论显示出它们在数学中核心的地位。它们的理论、技术及成果在理论上和应用上已经产生多方面的影响。从这时起，李群理论已经向纵深发展，除了以前三个大的方向重新形成新的热点之外，李群理论本身也得到全新的扩展。

（1）代数群：如果一个群同时又是 k 上的代数簇（即以 k 为系数的多项式方程组的零点），就称为代数群。许多实、复线性李群都是代数群，而代数群由于域远远超出实数域和复数域，形成一系列新的代数群。同时它们又具有李群的理论框架，这就形成一个丰富的理论，而且在类域论、自守函数论、数论等领域具有广泛的应用。1955年保莱尔（Borel，Armand，1923—）对线性代数群研究起着决定性作用。

（2）薛华荔群：薛华荔在1955年从复单李代数出发，构造出统一的李型单群序列，是有限群论最重要的突破之一。其后这纳入一般域 k 上的代数群 G（k）的研究，从1957年起形成了一般域上半单群及可约群的结构理论，其中也有经典理论中的嘉当子群、根、外尔群、布吕阿（Bruhat，Francois，1929—）分解等概念，但早已超出复李群李代数的范围了。

（3）蒂茨系统和建物：蒂茨在20世纪50年代中期开始研究群与几何学的新关系，他的目的是使复数域 C 上几何公理化。过去克莱因把几何学看成是研究在变换群下的不变性质

的。而蒂茨则完全改变这种观点，他由一个群 G 出发，通过具有某些性质的子群来定义几何学。其中关键的概念是 BN 对，现称为蒂茨系统，其中包括李群中保莱尔子群、抛物子群、外尔群等等，明显地显示李群理论的痕迹。对于每个 BN 对，对应一个几何对象——单纯复合形，现在称为建物（*building*）。G 作用在建物上，这就是对应于 G 的几何学。这样不仅得出域 k 上各种经典几何学，如实射影几何学、复射影几何学、有限域上射影几何学，而且产生一系列新几何学。例如例外群的几何学。通过观点的变换，还得到许多具有特色的几何学。1979 年布肯浩特（Buekenhout，Francis）沿着蒂茨的道路把邓金图加以推广，得到新的几何学。因此，有人讲，蒂茨几何是第二次几何革命。

（4）离散子群理论：正如正多面体群是转动群的有限子群一样，在李群及其各种推广中也有离散子群。它们在数论、自守函数理论、遍历理论等领域具有重要意义。它的历史很悠久，例如结晶体群以及模群都是 19 世纪重要的研究课题，但是一般的离散子群理论一直到 20 世纪 50 年代中期由塞尔伯格开始建立，得到一系列重要结果。

（5）表示理论：李群特别是半单李群的结构理论比较清楚，但是除了紧群和交换群之外，表示理论是数学前沿的难题。这主要由于一般非紧群的表示均为无限维表示，因此需动用分析的工具。这样它们形成相对独立的研究领域。这个理论，公认为当前数学最为艰深的部分之一。

6.2 李变换群

连续变换群的概念是李一人的独创，在此之前有三股潮流

引向这个概念的产生。

（1）置换群观念。

置换群观念来自代数方程论，后来逐步成为一般的独立的研究对象。它可看成是有穷集合到自身的变换的集合。1860年经塞尔、克洛耐克、马丢特别是若尔当的研究，已经逐步系统化，并开始在其它领域应用。李本人在1863年就听说过伽罗华理论。

（2）几何变换及不变式观念。

1841年起，英国数学家布尔开创了不变式论的研究。几何上它来源于图形在坐标的线性变换下不变的特性，并据此加以分类，代数上它考虑的是线性变换或变换的无穷集合，当时只知道两个变换之“积”仍是该集合中的变换。凯雷在1854年就是根据这点来定义“抽象群”的。

（3）运动群的观念。

第二个明确提出的连续变换群是若尔当在1868年提出的“运动群”，这是三维欧氏空间中平移群，不过他并没有把它作为一个独立的研究对象，也没有把它与上面两股潮流联系起来。

真正引导李到连续变换群的是1869—1872年他独立并和克莱因合作得出的一系列富有成果的概念。

（1）几何元素观念的扩张。通常认为几何的元素是点，也就是线、面、体是点的集合。普吕克尔第一个把线作为几何元素，建立线几何学，其基本对象是线复形。克莱因是普吕克尔的学生，他的博士论文也是普吕克尔指导的，而李是通过读普吕克尔的著作而进入数学领域并自认为是普吕克尔的学生的。因此，他们的变换观点就不仅限于点点变换，而大大扩张了。

1870 年李创立切触变换，特别是直线到球面变换，创立了李球几何学。

（2）把不变性及不变式的观念推广到分析及微分几何学。他发现通过求积法解微分方程的经典方法实际上完全依赖方程在“连续”族变换下的不变性质。作为这个思想的应用，李的第一篇论文中研究“瑞伊（Reye，Theodor，1838—1919）复形”，这复形是与四面体的面交截于给定交比的四点的四直线集合。他的方法就是运用瑞伊复形，在 3 参数交换群（*PGL*（4，*C*）的极大环面）（使四面体顶点不变）下的不变性质。1870 年春，他和克莱因合作基本上定出平面射影群 *PGL*（3，*C*）的所有连通变换子群。

（3）克莱因的埃尔兰根纲领。1871 年后，克莱因的兴趣转向非欧几何，进而以变换群为分类几何学的基础。其后，克莱因主要研究离散变换群，李主要研究连续变换群，但他们以群统一数学的观点是一致的。

（4）无穷小变换。在微积分发展初期，已有无穷小变换的概念。例如笛卡尔已有瞬时转动中心的概念。这样，从无穷小观点看，平面每个运动都可看成一个转动。拉格朗日的解析力学也有类似的观点。1851 年西尔维斯特为了求一般线性群 *GL*（3，*C*）的不变式，给他的矩阵元一个无穷小增量 $a_j dt$，不变式 $f((z_j))$ 满足

$$f((z_j + a_j(dt))) = f((z_j))。$$

从而 f 满足线性偏微分方程

$$Xf = \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0。$$

X 实际上是表示方向导数的微分算子，这是最早明显写出的

无穷小变换对应的微分算子。其后凯雷在计算特殊线性群 $SL(2, C)$ 的不变式时，也采用这种方法计算两个无穷小变换得出微分算子 X, Y，特别他还明显算出 $XY-YX$，证明它也可由一个无穷小变换导出。不过算子的括号运算在一阶偏微分方程的雅可比—克莱布什理论中已经有了。当 X, Y 是函数时，熟知有波瓦松括号及雅可比公式，这些相似之处李是非常熟悉的，他是依照这个模式来建立自己的理论的。1868 年若尔当在论运动群的论文中也从几何的观点使用“无穷小变换”的概念。他首先引进由一个无穷小变换生成的单参数群的概念。他把它定义为“适当重复”该无穷小变换。这种观念在克莱因及李合著的论文（1871）中也用过，但他们研究的是微分方程的积分曲线。

李的变换群理论正式在 1874 年发表，他自己曾多次谈到他是在 1873 年开始研究连续变换群的，不过在他 1873 年给迈耶尔（Mayer，Adolph，1839—1908）的一封信中，说他 1870 年在巴黎时已有变换群的概念。在 1871 年一篇论文中他明确地提出“变换群”这个词，并且明显提出问题：决定 $GL(n, C)$ 的所有连续及不连续的子群。不过显然这个新领域对他们并不容易，正如克莱因后来说，“李无疑创造连续算子群的想法，……不过在当时一切还处于萌芽状态……”

经过几年的考虑，1873 年李把自己的想法通信告诉迈耶尔。他由变换

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

的“连续”群开始，其中 x'_i 依赖于 r 个参数 $a_1, \cdots, a_r$，而当参数为 $a_1^0, \cdots, a_r^0$ 时，此变换是恒等变换。从而在参数变化时，他进行泰勒展开

$$f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1^0+z_1, \cdots, a_r^0+z_r)$$
$$=x_i+\sum_{k=1}^{r} z_k x_{ki}(x_1, \cdots, x_n)+\frac{1}{2}\sum_{k,hj} z_k x_{kj}\frac{\partial x_{kj}}{\partial x_j}+\cdots$$

把上式写成

$$x'=G(x, z),$$

其中

$$x=(x_1, \cdots, x_n),$$
$$x'=(x'_1, \cdots, x'_n),$$
$$z=(z_1, \cdots, z_r)。$$

由变换的组合

$$G(G(x, u)\ V)=G(x, H(u, v)),$$

其中 $H=(H_1, \cdots, H_r)$ 不依赖于 x，因此

$$H(u, 0)=u,$$
$$H(0, v)=v,$$
$$H_i(u, v)=U_i+V_i+\frac{1}{2}\sum_{h,k} C_{ikh}u_h v_h+\cdots$$

于是李得出关系

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_{hj}\frac{\partial x_{kj}}{\partial x_j}-x_{kj}\frac{\partial x_{ki}}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=0}^{r} C_{jhk}x_{li}。$$

令

$$A_k(f)=\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

他得出

$$[A_h, A_k]=\sum_l C_{lhk}A_l。$$

开始他称算子 $A_k(f)$ 为无穷小变换

$$dx_i=x_{ki}dt, \ 1\leqslant i\leqslant n$$

的“象征”(*symbol*)，不久他就不加区别地称算子 $A_k(f)$ 为

无穷小变换了。他通过切触变换及偏微分方程得到这个无穷小变换群，实际上是现在的李代数，后来他就抛开这些背景专门研究这些“群”了。

1874年以后，李研究变换群。一方面，他研究一般理论，最后总结在三大卷《变换群理论》（1888，1890，1893）中。另一方面，他得出许多特殊的结果，其中包括定出直线及平面的连续变换群并加以分类。他还在1883年引进无限连续群，并开始涉足常微分方程。从1874年到1880年，他发表了十几篇连续群的论文，但同时研究一阶偏微分方程特别是普法夫问题。从1877年到1881年他还研究极小曲面。

李的《变换群理论》第Ⅰ卷及第Ⅲ卷中5章是讨论所谓“连续有限群”的，其余部分讨论切触变换，在当时与连续群理论密切相关。现在看来，已经属于另外的学科了。第Ⅰ卷中总结的变换群理论，主要集中于李的三大定理，而现在这三大定理成为李代数的公理。

李第一定理是指函数 f_i 满足下列偏微分方程组

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}=\sum_{k=1}^{r}\xi_{ki}\left(f\left(x,\ a\right)\right)\ x_{kj}\ (a)\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

其中矩阵（ξ_{ki}）具有极大秩，det（x_{kj}）$\neq 0$。反之，如函数 f_i 满足该方程及条件，则上式定义变换群的一个群芽。

李的第二定理给出 ξ_{ki}之间以及 x_{ij}之间的关系，ξ_{ki}间关系为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial \xi_{jl}}{\partial x_k}-\xi_{jk}\frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}\xi_{kl}$$

$$(1\leqslant i,\ j\leqslant r,\ 1\leqslant l\leqslant n),$$

其中 C_{ij}^{k} 是常数（后称结构常数），x_{ij} 之间关系按照毛瑞尔

(Maurer, Ludwig, 1859—1927) 在 1890 年论文中所表述的，可以写为

$$\frac{\partial x_{kl}}{\partial a_m}-\frac{\partial x_{km}}{\partial a_l}=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}C_{ij}^k\ (x_{il}x_{jm}-x_{jl}x_{im}),$$

$1\leqslant k,\ l,\ m\leqslant r$。

引入无穷小变换 X_k 及 A_k，可得现在熟知的形式，令

$$X_k=\sum_{i=1}^n\xi_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(1\leqslant k\leqslant r),$$

$$A_k=\sum_{j=1}^r\alpha_{kj}\frac{\partial}{\partial a_j}\quad(1\leqslant k\leqslant r),$$

上面两式分别成为

$$[X_i,\ X_j]=\sum_{k=1}^r C_{ij}^k X_k\ (1\leqslant i,\ j\leqslant r),\qquad(*)$$

$$[A_i,\ A_j]=\sum_{k=1}^r C_{ij}^k A_k。$$

反之，如果 r 个无穷小变换 X_k ($1\leqslant k\leqslant r$) 线性无关且满足条件 ($*$)，这些变换生成的单参数子群就生成一个 r 参数变换群。

李的第三定理是结构常数 C_{ij}^k 之间关系

$$C_{ij}^k+C_{ji}^k=0,$$

$$\sum_{l=1}^r\ (C_{il}^m C_{jk}^l+C_{kl}^m C_{ij}^l+C_{jl}^m C_{ki}^l)\ =0$$

$(1\leqslant i,\ j,\ k,\ m\leqslant r)$。

反之，如上两式满足，则存在无穷小变换系统满足

$$[X_i,\ X_j]=\sum C_{ij}^k X_k\ (1\leqslant i,\ j\leqslant k)。$$

用现代语汇，这些 X_i 形成李代数，反过来，每个有限维李代数均可如此得出。这后半结果由 F·舒尔在 1889 年证明。

李仿照置换群理论对变换群的结构问题也进行初步研究。他引进两变换群相似的概念，即存在一个变元的可逆坐标变换

及一个参数的可逆坐标变换将一个变换群变成另一个。他知道两变换相似的必要条件是其相应的李代数同构，由于他没有李代数观念，他称两群等连（*gleichzusammengesetzt*），但这条件不充分。他证明两群等连的充要条件是两群一一同态，这词来源于若尔当。同样他也引入若尔当的另外词汇——映上同态，而且知道其典型例子——伴随表示，以及它与群的中心的关系。他证明这些定理的主要工具都是雅可比—克莱布什的一阶偏微分方程组的完全可积性定理，但没有引用弗洛宾尼乌斯的更一般的定理。

李还花了很大力气把置换群的可迁性及本原性概念搬到变换群上，他还看出点的稳定子群与齐性空间概念的关系，不过他始终在交换群中打圈子，没能过渡到抽象群。同样，他基本上在局部打转，难得从大范围来考虑。更有甚者，他始终在微分方程及几何的应用中考虑问题，而不能跳出来对结构及分类问题进行研究。真正现代李群、李代数的研究却不是他和他的学生的成果。这就是基灵由1888年开始后由E·嘉当所继续的结构数学的主流。可悲的是，他对于离开他的路线的基灵恨之入骨（他告诉他的学生，你们碰到基灵，就把他杀了）。因此，他离开这个极富有创造性的方向越来越远了。

李的理论紧密地与微分方程相联系，他始终没有把他的李群同变换群分开。用现代语言讲，他多多少少认识到：每个李群定义一个李代数，反过来，给定李代数，李群的局部结构就完全决定，也就是两个具有同构李代数的李群局部同构。李群的局部李子群由李代数的子代数决定。如果李群是局部单群，即没有局部定义不变李子群，则李代数是单的，也就是没有非平凡理想。

不过“李代数”一词一直到1934年才由外尔首先提出来。在他以前的论文中，他也用“无穷小群”这个词。实际上，他们是指无穷小群的“无穷小变换” x_1f_1，…，x_rf_r，不过李和恩格尔常把它简称为群。

李在这个时期的思想，实际上还停留在列举阶段。1883年他决定出所有 n 维单李代数，它们具有 $n-1$ 维，$n-2$ 维或 $n-3$ 维的极大子代数，后来他应用美国数学家佩奇（Page，M.）的结果，成功地讨论 $n-4$ 维的情形。

1885年，李指出有4个类型局部单李群：

A 型：射影一般线性群 PGL（n，C），$n>1$。

B 型：射影正交群 PO（$2n$，C），$2n>4$。

C 型：射影辛群 PSp（$2n$，C），它保持交错双线性型

$$(x_1y_2-x_2y_1)+\cdots+(x_{2n-1}y_{2n}-x_{2n}y_{2n-1})$$

不变。

D 型：射影正交群 PO（$2n-1$，C），$2n-1>1$。

他还引进可解李代数的概念，如果它具有合成列

$$A\supset A_1\supset\cdots\supset A_m=\{0\},$$

其中每合成因子 A_{i-1}/A_i 是一维李代数，他称为可积（*integral*）李代数。

1887年恩格尔证明：每不可积李代数包含一个三维单子代数，反之也对。

1886年春天，李从挪威来到德国，就任莱比锡大学教授，接替克莱因的空缺。这大大改善了李的处境，其中最重要的是，他的许多工作得到了传播，而在以前十多年，李的论文常常用挪威文发表在克里斯蒂安尼亚（今奥斯陆）科学院的院报上，因此极少有人知道他的工作。在德国的十几年，李的工作

有了一定的影响。他有恩格尔，还有舍菲尔斯（Scheffers, Georg, 1866—1945）帮助他写书，甚至从来不到德国留学的法国年轻人，也有两位来到莱比锡，他们是维西奥和特雷斯（Tresse, A.），他们在莱比锡呆了一年，跟着李学习。E·嘉当关于李的理论就是从特雷斯那里听说到的。

这时，F·舒尔（注意他不是研究表示论的I·舒尔，也和他没有亲戚关系）研究李群，在1890年发表的题为“有限变换群理论的新基础”一文中。他证明，在李变换群的定义中，

$$x'_i = f_i\ (x_1,\ \cdots,\ x_n,\ a_1,\ \cdots,\ a_r)\ (1 \leqslant i \leqslant n),$$

只须假定 f_i 是二次连续可微的，则该变换群即可同构于一个解析群。他的结果促使希尔伯特提出他的著名第5问题：是否只假定 f_i 连续，即可得到同样结论。

6.3 基灵和嘉当的工作

基灵1847年5月10日出生在德国威斯特伐利亚的布尔巴赫，1923年2月11日于明斯特去世。1865年入明斯特大学学习，后转到柏林大学，成为魏尔斯特拉斯的学生。在魏尔斯特拉斯的指导下，1872年获得博士学位。在博士论文中，他用魏尔斯特拉斯在1868年发展起来的矩阵的初等因子理论来研究二次曲面。其后他在布里隆教中学，开始自己的几何研究工作。1882年在魏尔斯特拉斯的推荐下，他到东普鲁士布劳恩斯伯格任一所天主教女子中学数学教授。从1882年起这十年中，他在完全孤立的条件下独自研究数学，主要是几何基础以及李代数的研究。1892年他被任命为明斯特大学教授，一度出任大学校长。

基灵的工作是从高维非欧几何开始的，1884年他对于空

间问题的研究产生出李代数的原始思想。他关于几何的自同构群的想法受到克莱因的影响，在 1884 年系统地提出无穷小自同构群来对几何学进行分类。他把他的纲领寄给克莱因，克莱因建议他注意李的工作。他给当时在挪威的李写信后，收到李在挪威杂志刊载的论文的复印本。他不懂李关于可解李代数的定理，而把复印本退还，这使得他和李的关系非常不好，以致李对他和他的工作评价极坏。

不过，李的学生恩格尔却一直鼓励他，而且对他发表自己的论文起着决定性的作用。这时基灵所研究的问题完全超出李的范围之外，完全是自己提出来的问题，用的也是从魏尔斯特拉斯处学来的线性映射的本征值分解方法。他的论文以“连续有限变换群的关系”为题，共 4 篇，发表在《数学年刊》第 31 卷，33 卷，34 卷和 36 卷上。在这些论文中，他对于复半单李代数的结构做出完全的分类，即在李的 4 个单李群系列之外，还有 6 个例外单群 G_2，F_4，E_4，E_6，E_7，E_8。其次，他还说明，每不可积李群由可积不变子群和另一个子群构成，后者是单李群的直积。正如 E·嘉当正确指出的，基灵的工作首先对李群理论“迈出巨大一步”，其次也指出他的种种错误，并加以修正，特别是指出他的 6 个例外单群中，有两个（E_4，F_4）是同构的。

E·嘉当在他的博士论文中，逐点把这篇错误很多的论文加以改正。实际上早在嘉当之前，恩格尔已指出其中关于幂零李群的错误。

尽管这 4 篇论文错误很多，近年来对数学史的研究再次揭示出其历史价值。柯尔曼（Coleman，A. John）说，他的第Ⅱ篇论文是千古之作。

这篇划时代的论文究竟有什么重大的历史意义呢?

首先，在思想方面，这篇论文对于后来对任何数学对象的所有可能的结构进行分类树立了一个范例，而这正是结构数学的中心目标所在。研究结构的初期，往往只局限于列举，这对于结构和分类的道路影响不大。而基灵的结果第一次树立了一个非平凡分类的榜样，其中结构的思想起着决定性的作用。它对于后来更为容易的结合代数的结构和分类也有一定的影响。把代数结构划分为半单和可解两部分也来源于此。

其次，研究结构及其分类的确是有史以来第一次，因此需要极大的创造性。实际上，对于有限维复半单李代数的分类有多条途径，但本质上都有5个组成部分:

(1) g 中嘉当子代数 h 的存在性;

(2) 基灵形式及其在 h 对偶空间 h^* 中的实现;

(3) g 对于 h^* 作用的根空间分解;

(4) g 半单性判据(基灵形式非退化);

(5) 半单代数分解为单代数直和。

实际上嘉当子代数和嘉当矩阵、嘉当整数都来自基灵。他断言嘉当子代数是交换的。他也引入秩及半单代数的概念，而且根系的概念以及外尔群元素和考克斯特变换在他的论文中都有萌芽。他的分类结果极为重要，他发现存在极大可解理想，李代数的导代数可分解为可解和半单两个部分，但证明不完全。他还发现半单李代数可分解为单代数直和，而基灵发现例外李代数的功劳更是不可埋没。

不可否认，基灵的论文有许多错误和不足之处，他不知道 C_n，把 E_4 和 F_4 搞重复，而且幂零李代数。他的错误先后被恩格尔指出，恩格尔的学生乌姆劳夫(Umlauf, Arthur)在他

的博士论文中严格证明基灵的某些定理，其余的漏洞则为E·嘉当所弥补。

E·嘉当是20世纪前半叶最伟大的数学家，他承认基灵的工作迈出了巨大的一步，对于其中的错误加以改正。他的博士论文成为复半单李代数分类的完整论述。他证明“嘉当子代数是交换的”这个结果，他在论文中才真正引入所谓“基灵形式”，而且建立两个基本判据，即通过基灵形式来判定李代数的可解性及半单性。他推广基灵的命题：任何李代数均为其根基和半单子代数之和，但没有证明。第一个发表的证明是E·E·列维在1905年给出的。

20世纪前25年，对李群的贡献主要局限于李群，也就是复和实李代数，在这方面做出巨大贡献的是E·嘉当。

1914年，他完成实数域上有限维单李代数的分类。

1913年，他引入权系方法，对所有复和实单李代数定出所有不可约表示，特别是对正交群得出二值旋表示。

1909年，他发展了李的无穷维无穷小李群理论，实质上是无穷维李代数理论。

在1925年外尔建立了整体李群的理论之后，李群理论一方面沿着这个方向大步前进，另一方面，李代数作为独立的领域仍然沿着自己的道路发展，在这方面，有一些重要的结果。

（1）**庞加莱－伯克霍夫－维特定理**　任何李代数可嵌入在万有包络代数之中。庞加莱在1899年对特殊情形进行了证明，1937年，美国数学家G·伯克霍夫（Birkhoff，Garrettt，1911—1996）和德国数学家维特独立给出代数证明。

（2）**阿杜定理**　所有李代数都同构于线性李代数。李在引入李群时，已经考虑过这个问题。他以为通过伴随表示可以肯

定解决这个问题，但很快就认识到证明只对具有 O 中心的李代数才对。其后 60 年一直未能解决，直到 1935 年才为苏联数学家阿杜（Ado，Igor Dmitrievich）所攻克。

（3）**列维－马力茨夫定理** 李代数可分解成根基和半单子代数的直和。基灵和嘉当都认识到这个定理。对复李代数，E·E·列维在 1905 年首先发表证明。1936 年英国数学家 J·H·C·怀特海（Whitehead，John Henry Constantine，1904—1960）给出又一证明，它对实李代数也适用。1942 年，苏联数学家马力茨夫证明列维分解的唯一性。

（4）**完全可约性定理** 半单李代数的线性表示是完全可约的。这个定理最早出现在李和恩格尔合著的《变换群理论》第Ⅲ卷中，其中提到史图迪在一份未发表的手稿中证明 SL（2，C）的李代数具有这个性质，并且得到 SL（3，C），SL（4，C）部分结果。李和恩格尔猜想对任何 n，SL（n，C）都具有这个性质。1925 年外尔通过整体观点证明了这个结果。1935 年范·德·瓦尔登和卡西米尔（Casimir，Henk，1909—）给出第一个纯代数证明。1936 年布劳尔和 1937 年 J·H·C 怀特海给出其它代数证明。

这样，李代数形成自己独立的代数理论，远离李群的复杂背景，向无穷维及一般域推广。这个方向是美国数学家贾柯比孙（Jacobson，Nathan，1910—）首先开创的，因此，我们可以说 1934—1935 年是李代数独立的年份。

6.4 李代数理论

对于李群来讲，过渡到李代数是一种简化，而且这种简化不仅保留李群的局部信息，而且可以避开解析的和几何的方

法，完全使用代数的方法去研究。李群作为群，虽然是比较纯粹的代数结构，但作为李群实际上相当复杂，具有拓扑的解析结构。李代数作为一种代数，表面上比较复杂，实际上相当单纯，尤其是我们把造成麻烦的成分用比较简单的特殊对象来代替，我们就可以得到完满的结果，而且为比较困难的推广树立了榜样。

一个代数，为一个具有么元交换环 k 上的 k 模，而且给定一个 k 双线性映射

$$A \times A \longrightarrow A,$$
$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

而形成 k 上的环。

k 上的李代数即满足下列公理的线性非结合代数：

公理 1 （反交换性）对任一 $x \in A$，

$$[x, x] = 0。$$

由公理 1 可得 $[x, y] = -[y, x]$。

公理 2 （雅可比恒等式）

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0。$$

李代数有许多例子，特别是如果 A 是 k 上线性结合代数，我们可以定义

$$[x, y] = xy - yx,$$

则 A 在括号积 $[,]$ 之下成为李代数。

如 A 为 k 上代数，则代数 A 的所有导微算子也构成一个李代数。A 的导微 D，是 A 的 k 线性映射 $D: A \longrightarrow A$，满足

$$D(x \cdot y) = Dx \cdot y + x \cdot Dy。$$

李代数 A 中最重要的导微，是伴随映射 adx，其定义为

$$adx\ (y) = [x,\ y]。$$

代数 A 的所有导微的集合记作 $Der\ (A)$，其括号乘积定义为

$$[D,\ D'] = DD' - D'D。$$

注意由结合代数构成的李代数和由导微代数构成的李代数并不一样，尽管造法有类似之处。

如 k 是具有么元的交换环，则以 k 的元素为矩阵元的 $n\times n$ 矩阵的集合 $M_n\ (k)$ 也构成一个李代数，其括号乘积为

$$[X,\ Y] = XY - YX。$$

为了研究李代数的结构，我们只考虑 k 为复数域 C 和实数域 R 的情形，而且维数为有限维。我们在熟悉了群的结构分类和表示理论的框架之后，就不难理解相应李代数的结构、分类和表示理论了。只是对应于正规子群的是李代数中的理想，而理想 a 是李代数 g 中满足于 $[a,\ g]\subset a$ 的子代数。

仿照群的线性表示，我们可以定义李代数的线性表示。如 V 是 k 上线性空间，V 到 V 上所有线性映射构成 k 上的矩阵代数，它可以产生李代数 $gl\ (V)$。李代数同态

$$\rho: g \longrightarrow gl\ (V)$$

称为李代数 g 的表示，特别以 g 为 V 时，

$$adx: g \longrightarrow gl\ (g),$$
$$y \longmapsto [x,\ y]$$

称为 g 的伴随表示。

对于每个表示都对应一个对称双线性型

$$B_\rho\ (x,\ y) = Tr\rho\ (x)\ \rho\ (y),$$

它满足不变性条件

$$B_\rho\ ([x,\ z],\ y) = B_\rho\ (x,\ [z,\ y]),$$

当 ρ 为伴随表示时，其不变双线性型称为李代数 g 的基灵形

式。

对每个元 $x\in g$，令

$$det\ (tI-ad\ (x)) = \sum_{i=0}^{n} t^i P_i\ (x),$$

其中 n 为李代数 g 的维数，$P_n=1$。设 l 是使 $P_l\neq 0$ 的最小整数，则 l 称为 g 的秩。g 的元 y 称为正则元，如果 $P_l\ (y)\neq 0$，否则称为奇异元。

李代数的结构理论：

(1) 交换李代数

李代数称为交换的，如 $[g, g]=0$。

(2) 幂零李代数

g 的降中心列是 g 的一系列理想 $(C^n g)$，$n\geqslant 1$，它由下列公式递归的定义

$$C^1 g = g,$$

$$C^n g = [g, C^{n-1} g],\ 如\ n\geqslant 2,$$

显然，

$$C^2 g = [g, g],$$

$$[C^n g, C^m g] \subset C^{n+m} g。$$

如果存在一个整数 n，使 $C^n g=0$，则称 g 为幂零李代数，具有类 $\leqslant n-1$。由定义，交换李代数是 0 类幂零李代数，幂零李代数可以由交换李代数通过逐次中心扩张得到。

对于幂零李代数 g，有如下的刻画定理：

g 是幂零的当且仅当对每个 $x\in g$，adx 是幂零的。

证明下列著名的恩格尔定理：

如 $\rho: g \longrightarrow End\ (V)$ 为李代数 g 的线性表示，设对于每 $x\in g$，$\rho\ (x)$ 均为幂零的，则存在非零向量 $v\in V$ 在 g 下不

变，也就是对每 $x\in g$，$\rho(x)v=0$。二维幂零李代数一定是交换李代数，三维幂零但非交换李代数有基 $\{x, y, z\}$ 满足 $[x, y]=z$，$[x, z]=[y, z]=0$。

(3) 可解李代数

可解李代数是幂零李代数的推广。对 g 存在 g 中的理想构成的导出列 $(D^n g)$，定义为：令

$$D^1 g=g,$$

$$D^n g=[D^{n-1}g, D^{n-1}g], \quad n\geqslant 2,$$

如果 g 存在 n 使 $D^n g=0$，则称 g 为可解的。可解李代数基本定理是李证明的。

李定理 若 ρ 是复可解李代数在 V 上的线性表示，则存在 $v\in V$，$v\neq 0$，使得对每一 $x\in g$，v 都是 $\rho(x)$ 的本征向量。其等价形式为，若 g 是复可解李代数，则其不可约表示是一维的。由此可知，g 是可解的当且仅当 $[g, g]$ 是幂零的。

E·嘉当的可解性判据 对于 $g^l(n, k)$ 的子代数 g，g 可解当且仅当对任何 $x\in g$，$y\in[g, g]$，$T_r(x\cdot y)=0$。

不过可解李代数的分类至今仍存在困难。

(4) 半单李代数

粗糙地讲，李代数大致可分为两部分：一部分可解，一部分半单，后者是这理论的重点所在。这部分结构可以说已经研究得比较清楚，而且影响到广大领域。

任何一个李代数 g 中的理想 a，b 如果是可解的，则 $a+b$ 也是可解的。因此，g 中存在一个最大的可解理想，称为 g 的根基。

李代数 g 称为半单，如其根基为 0。这样，对任意李代数

g，r 为其根基，则商代数 g/r 为半单李代数，同时 g 中存在一个子代数 s 是 r 的补集，这就是：

列维分解定理 如 g 的根基为 r，则存在 g 的半单子代数 s，使得 $g=s+r$ 且 $s\cap r=0$。

关于半单李代数有：

E·嘉当判据 李代数 g 为半单当且仅当其基灵形式是非退化。

对于半单李代数，已有漂亮的结构定理：半单李代数同构于单李代数的直和。

有限维单李代数正如有限单群一样，是建筑半单李代数的基本模块。它们的定义也很类似。单李代数 s 就是没有 $\{0\}$ 和自身 s 之外的理想。另外我们也要求 s 是非交换的。除掉这些平凡的情形之外，它是李代数中最单纯的组成部分。这样，我们的下一步集中于决定所有的复和实的单李代数，它要比决定所有有限单群容易得多。

(5) 复单李代数

有限维复单李代数共有 4 个无穷系列 A_n，B_n，C_n，D_n，其中下标 n 表示李代数的秩。它们也称为典型（经典）李代数。另外还有 5 个“例外”单代数 G_2，F_4，E_6，E_7，E_8，它们的维数分别是 14，52，78，133，248。

对于 $n\geqslant1$，$A_n=sl(n+1)$，是 $n+1$ 个变元的特殊线性群 $SL(n+1)$ 的李代数。

对于 $n\geqslant2$，$B_n=so(2n+1)$，是 $2n+1$ 个变元的特殊正交群 $SO(2n+1)$ 的李代数。

对于 $n\geqslant3$，$C_n=sp(2n)$，是 $2n$ 个变元的辛群 $S_p(2n)$ 的李代数。

对于 $n\geqslant4$，$D_n=so\ (2n)$，是 $2n$ 个变元的特殊正交群 $SO\ (2n)$ 的李代数。

我们去掉了 B_1，C_1，C_2，D_1，D_2，D_3 是因为有如下的重复

$$A_1=B_1=C_1,$$
$$B_2=C_2,$$
$$A_3=D_3,$$

而且 D_1，D_2 不是单李代数，D_1 是一维交换李代数，

$$D_2\simeq A_1+A_1。$$

另外 G_2 有较为简单的定义，它是凯雷八元数代数的导微代数。

(6) 根系与外尔群

李代数再一次简化就形成“根系”及其有关的群（考克斯特（Coxeter，Harold Scott Macdonald，1907—）群，外尔群）以及图式（考克斯特图、邓金图）等，它们直观而简明，使得整个结构和分类理论一目了然，而且这套理论已经发展成为新理论的基础。

如前所述，基灵已有根的概念，他的根是特征方程

$$det\ (adg\ (x)\ -I)\ =0$$

的根，它们形成既约根系。外尔在 1925 年引入外尔群，1933 年范·德·瓦尔登据此证明复李代数分类问题等价于既约根系的分类。1934 年考克斯特正式引入一般的反射生成的群，后称为考克斯特群，得出其中有限群的生成元 R_i（由对合组成）和关系 $(R_iR_j)^{m_{ij}}=1$，并加以完全列举。1941 年史梯费尔(Stiefel，Edward，1909—1978）证明外尔群正好就是有限考克斯特群。考克斯特图式不足以区别所有李代数。邓金在

1946 年引入邓金图，完整地简化复半单李代数的分类。其后邓金图又加以改动，最后完成实半单李代数的分类。

6.5 整体李群

虽然从李构思李变换群的时代（19 世纪 70 年代）起，李就认为他的李群只不过是一个群。然而后来发现李群是一个极为复杂的对象，对于它的认识一直到半个世纪后才逐步摆脱局部观点，20 世纪 20 年代对李群究竟是什么逐渐有些眉目。李群同时具有三种结构：群；拓扑空间；流形。这三者在李群身上既是独立的，又是相互关联的，共同生存在一个集合之上。在李群研究中，我们具有纯属群论的概念，例如子群、正规子群、商群、交换群（阿贝尔群）、幂零群、可解群、半单群、单群、同态、同构、自同构、群直积等等。同样，我们有一般拓扑学的概念，例如拓扑空间、邻域、豪斯道夫空间、开集、闭集、闭包、连通、局部连通、紧、局部紧、拓扑直积等。流形虽然有支持它的拓扑空间，但是李群的流形引入许多特殊而具体的结构。首先是定义流形的局部坐标块引进域上的向量空间，这样在李群中出现实李群、复李群的字样。其次是坐标块之间的映射出现连续、可微、实解析及复解析的映射。李群作为解析流形，有一系列拓扑性质，如同调、同伦等，以及一系列几何结构，特别是切空间、向量场、微分形式等。

这三种结构又有机地结合在一起，不但没有增加其多样性及复杂性，反而大大简化了它的品种。

群和拓扑空间的结合即所谓拓扑群，其集合 G 同时是群（称为拓扑群的基础群），又是拓扑空间（称为拓扑群的基础方向）。而且从直积拓扑空间 $G\times G$ 到 G 中的映射

$$G \times G \longrightarrow G,$$
$$(x,\ y) \longmapsto xy, \qquad ①$$

以及 G 到 G 中的映射

$$G \longrightarrow G,$$
$$x \longmapsto x^{-1} \qquad ②$$

都是连续映射，则称 G 为拓扑群。两个拓扑群之间的映射 f，如果是其基础群的同构映射，同时又是拓扑空间的同胚映射，就称为拓扑群之间的同构。

对于李群，由于它是解析流形，我们通常要求拓扑空间是豪斯道夫空间，而且是局部紧的。

如拓扑群 G 每一点都有一个与欧氏空间某个开集同胚的邻域，就称之为局部欧氏群。若 G 同时是实解析流形，且

$$G \times G \longrightarrow G,$$
$$(x,\ y) \longmapsto xy^{-1} \qquad ③$$

为实解析映射，则称 G 为李群，因此李群是局部欧氏群。反之，局部欧氏群是否为李群，这就是希尔伯特第5问题。

薛华荔在他1946年出版的《李群理论》一书中，定义了解析群，它是把群与解析流形 V 联系在一起的产物，即映射

$$V \times V \longrightarrow V,$$
$$(x,\ y) \longmapsto xy^{-1}$$

在 $V \times V$ 上处处是实解析映射。解析群的优越性在于解析群的左不变无穷小变换形成一个实李代数，其维数与解析流形的维数相等。一个解析群当然会有自己的基础拓扑群。同样可以定义复解析群。

由于希尔伯特第5问题的解决，定义李群的解析流形和解析映射

$$G\times G\longrightarrow G,$$
$$(x,\ y)\longmapsto xy^{-1},$$

可以代于拓扑流形及拓扑映射，不过为了方便，我们可以定义：实数或复数域 k 上的李群 G 为一个群 G 具有 k 上微分流形结构，使得映射

$$G\times G\longrightarrow G,$$
$$(x,\ y)\longmapsto xy^{-1},$$

是可微的。

李群的例子包括：

(1) 域 k 的加法群 k 和乘法群 $k^{\times}$，因此，加法群的直积 k^n 也是李群。

(2) 复平面上单位圆 T 是实李群，T^n 称为 n 维环面是重要的紧李群。

(3) 有限群和可数离散群是 0 维李群。

(4) 最典型的李群是线性李群，即域 k 上 n 维向量空间可逆线性变换构成的群，也就是 $n\times n$ 可逆矩阵群，记作 $GL(n,\ k)$。

它的子群也是李子群的有：

$SL(n,\ k)$，么模矩阵群；

$O(n,\ k)$，正交矩阵群，维数 $\frac{n(n-1)}{2}$；

$Sp(2n,\ k)$，辛矩阵群，维数 $n(2n+1)$。

另外 $U(n)$ 是酉矩阵群，是 $GL^{+}(n,\ C)$ 的 n^2 维实李子群。还有 $GL(n,\ R)$ 表示有正行列式的实矩阵群。$SO(n)$ 为具有行列式 $+1$ 的正交矩阵群，$SU(n)$ 为具有行列式 $+1$ 的酉矩阵群。

典型李群的连通与单连通性质：

(1) $SL(n, k)$, $GL(n, c)$, $GL^{+}(n, R)$,

$Sp(n, k)$, $SO(n, k)$, $U(n)$, $SU(n)$ 均为连通的。

(2) $GL(n, R)$, $O(n, K)$ 为具有两连通组分的李群，每个连通组分具有正或负的行列式。

(3) 连通李群的基本群是阿贝尔群。

(4) $SL(n, C)$, $SU(n)$, $Sp(n, C)$ 是单连通的李群。

(5) $GL(n, C)$, $U(n)$, $Sp(n, R)$ 的基本群为无限循环群 Z。

(6) $SO(n, C)$, $SO(n)$, $GL^{+}(n, R)$, $SL_n(R)$，当 $n \geqslant 3$ 时，基本群为 Z_2，$n=2$ 时，基本群为 Z。

不过，我们下面考虑的主要是复李群和实李群，这样，整体李群的结构问题分为互相有关的两部分。一部分是拓扑结构，从E·嘉当在20世纪20年代末开始，是拓扑学重要的组成部分。另一部分是代数结构，其中相应李代数结构决定其局部结构，整体结构也比较清楚。

对任何连通李群 G，仍存在列维分解，即

$$G = S \cdot R(G),$$

其中 S 是一个极大半单子群，$R(G)$ 是 G 的根基，即 G 中最大的连通可解正规子群。如果 $R(G) = \{1\}$，则称 G 为半单李群。马力茨夫在1942年证明：G 中所有极大半单子群互相共轭。如果 G 是单连通的，则 $S \cap R(G) = \{1\}$，乘积是半直积。1945年马力茨夫证明：连通李群是线性的，当且仅当根基 $R(G)$ 和半单商群 $G/R(G)$ 是线性群。而 R

(G) 线性当且仅当其换位子群为连通的。G/R (G) 是否可线性表示依赖于其中心的结构。他得出了一般连通李群的拓扑结构基本定理：连通李群同胚于极大紧子群与欧氏空间 R^n 的拓扑积。

这样一来，连通李群的结构同样归结为可解和半单两个部分。也同李代数的情形类似，交换李群是幂零李群的特殊情形，它们又是可解李群的特殊情形。

1941 年薛华荔证明：任意连通可解李群与 $R^n \times T^m$ 微分同胚，其中 T^m 是 m 维环面。1955 年，他还证明代数分解定理：连通可解李群同构于一个正规子群 N 和一个交换子群 A 的半直积 $N \times A$，其中 N 由幂么元素构成，A 由半单元素构成。

半单李群 G 的分类归结为局部分类（即其李代数的分类）与整体分类（即对应于同一半单李代数有多少不同的李群）两步。半单李群分为三组：

(1) 复群：$GL(n, C)$

$SL(n, C)$

$SO(n, C)$

$Sp(n, C)$

除 $GL(n, C)$ 外，所有群都具有有限中心，从而是半单的。

(2) 紧群：$SO(n)$

$U(n)$

$SU(n)$

$Sp(n)$

(3) 非复非紧群，其中包含极大紧子群 K 附于其后：

$SL(n, R)$　　　　$SO(n)$

$SL(n, H)$	$Sp(n)$
$SO(m, n)$	$SO(m) \times SO(n)$
$SU(m, n)$	$S(U(m) \times U(n))$
$Sp(m, n)$	$Sp(m) \times Sp(n)$
$Sp(n, R)$	$U(n)$
$SO^*(2n)$	$U(n)$

对于复群和紧群，基本结构由邓金图和特征格子决定，特征格子与基本群有关。每个具有李代数 g 的半单李群 G 均对应 g 的嘉当子代数 n 中的格子 $\Gamma(G)$。反之，对于任何 $\Gamma(G)$，$\Gamma_0 \subset \Gamma(G) \subset \Gamma_1$，对应唯一连通李群 G，其中 Γ_0 为当 G 为单连通时对应的格子，$\Gamma_1 = \Gamma_1(g)$ 为所有 g 根向量构成的格子。这样，G 的基本群

$$\pi_1(G) \cong \Gamma(G)/\Gamma_0。$$

但商群 $C(g) = \Gamma_1/\Gamma_0$ 是具有李代数 g 的单连通李群的中心，它是有限的。列表如下：

g	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8，E_4，G_2
$C(g)$	Z_{n+1}	Z_2	Z_n	$Z_2 \oplus Z_2$	Z_4	Z_3	Z_2	0

这样就完成了复半单李群的分类。而每一紧实李群均可作为一个极大紧群嵌入到复半单李群中去，因此也有类似的分类。非复非紧群则稍复杂，但也完全解决。

复半单李群理论自然推广到代数群理论（见下节）。但是在李群基本结构理论弄清之后，从 20 世纪 50 年代起，一般李群特别是非紧半单李群的表示理论一直是当代数学研究的前沿课题，是一个技术高深、理论精美、应用广泛的重要领域。

7 代数群

代数群从某种意义上来讲是李群的代数化，这里代数化是指把复李群推广到一般的域上。为了出现一般的域，我们要求代数群不仅有群的结构，同时还具有代数簇的结构。而代数簇则是系数取在某个域 K 中的多项式的零点。研究代数簇自然与域有较大关系，因此我们要求域是代数封闭的。复数域 C 就是典型的代数封闭域，但是我们还有许多其它的代数封闭域，特别是特征 $p>0$ 的域。

对于一般代数群我们有薛华荔定理：对于任何域 K 上代数群 G，存在 G 的正规子群 L，使得 L 是线性代数群，G/L 是阿贝尔簇。

因此我们分开研究代数群的两大类：一类是阿贝尔簇，它的群是交换群，一类是线性代数群，可以看成系数取在 K 中的 $n\times n$ 可逆矩阵构成的群 GL (n, K) 以及它的子群。例如正交群以及对角矩阵群 T (n) 和上三角矩阵群 B (n)，这些线性代数群的理论同复李群有惊人的相似之处。

线性代数群正式出现应该说是 1955 年左右，但是其前史可追溯到 19 世纪。虽然线性代数群可看成是复李群的代数化，但是，在李的工作中找不到代数群的踪迹。这是因为李的方法是从分析及几何角度来研究问题，其次，他的局部观点得不出

整体的群的观念，因此最早代数群的观念出现在另一位大师——法国数学家毕卡的著作中。他也是想把伽罗华理论由代数方程扩广到微分方程上，不过他与李不同，只是推广到线性常微分方程上。实际上他考虑复平面上 n 阶线性微分方程

$$\frac{d^n f}{dz^n} + a_{n-1}(z)\frac{d^{n-1} f}{dz^{n-1}} + \cdots + a_0(z) f = 0, \qquad ⊛$$

其中系数均为 z 的多项式。方程⊛具有 C 上 n 个线性独立的全纯解 f_1，…，f_n，设 L 为在 $C(z)$ 中添加 f_i 及其所有导数后形成的域，则 L 的所有与导微算子交换的 $C(z)$ 线性自同构构成一个群，即定义为微分方程⊛的伽罗华群，记作 G。

如 $x \in G$，则

$$x \cdot f_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} f_j,$$

对于 $x \in G$，矩阵 $(x_{ij}) \in GL_n(C)$ 形成一个线性代数群，作为群，它与伽罗华群 G 同构。

毕卡在 1882 年宣布他的结果，并在 1887 年给出详细证明，他充分意识到这种伽罗华群是线性群，其矩阵元之间满足代数关系。而且他还明显地用“代数群”（*groupes algebriques*）这个词。毕卡的理论从 1892 年起为维西奥（Vessiot, Ernest, 1865—1952）等所发展，形成毕卡—维西奥理论。

经过一段时期的沉寂之后，毕卡—维西奥理论为李特（Ritt, Joseph Fels, 1893—1951）所发展，他在 1930 年创立微分代数理论，基本上是沿着诺特的理想理论发展的。而从群论方面进行研究首先是由美国数学家科尔钦（Kolchin, Ellis Robert, 1916—1991）开始的，他的理论应该说是现代代数群理论的起点，他明确研究的是代数矩阵群，并直接同毕卡—维西奥理论相关联。科尔钦考虑一般的代数封闭域 K。由于考

虑 K 上代数簇，自然拓扑是查瑞斯基拓扑。在查瑞斯基拓扑之下，G 连通等价于 G 是不可约代数簇，也等价于 G 作为群没有有限指数的子群。科尔钦在 1948 年证明：G 具有唯一一个具有有限指数的连通的正规代数子群 G^0，我们称 G^0 为 G 的么元组分。

另一个基本定理是李—科尔钦定理：设 $G<GL(n, K)$ 为连通 K 群，而且作为抽象群它是可解群，则存在 $x\in GL(n, K)$，使得 $xGx^{-1}\subset B(n)$。

这个定理对于线性微分方程很重要，由它可推出：线性齐次微分方程的解是初等函数当且仅当其伽罗华群是可解的。

这个定理标以李的名字是因为李对复可解李代数证明李定理，但李定理对特征>0 的域不成立。由此可见，局部结果对特征>0 不成立，但整体结果却可以推广到特征 $p>0$ 情形。另外，连通性的几何假定是必不可少的，例如有限可解群是反例。

大约同时薛华荔和魏伊也进行一般代数群的研究。1947 年薛华荔和段学复引入代数的李代数概念，得到代数群一些结果。这些结果收入薛华荔的《李群论》第二卷（1951）中。特别是 1955 年魏伊等人关于商代数群存在的结果，以及 G 是线性代数群，H 是正规代数子群，则 G/H 也是线性代数群。同样在 1955 年薛华荔引进有限域的代数群，在此之前狄奥东涅研究一般域上典型群。

真正现代一般代数群理论是由 A·保莱尔和薛华荔在 1955 年建立的，他们的共同点在于都应用代数几何学，保莱尔更侧重于建立一般线性代数群的理论基础，而薛华荔则以复单李群为样板去分类任意特征的线性单代数群。

下面简单地看一下线性代数群 G 的基本结果，但要求域 K 是代数封闭的，而特征可以 >0。

1．若尔当分解

任何元素 $g\in G<GL(n, K)$ 均可唯一分解成两可交换元素 g_s，g_u 之积，其中 g_s 是半单的（即可化为对角矩阵），g_u 是幂么的（即所有本征值为 1），如果 $g\in G$，则 g_s，$g_u\in G$ 且 $g=g_sg_u=g_ug_s$。

2．结构定理

线性代数群 G 称为幂么的，如所有元素均为幂么，幂么群作为抽象群是幂零的。

由此我们有根基和幂么根基存在。G 的根基 $R(G)$ 是其极大、连通、正则、可解子群，G 的幂么根基 $R_u(G)$ 是其极大、连通、正则、幂么子群，显然 $R_u(G)\subset R(G)$。G 称为半单，如果 $R(G)=\{I\}$。G 称为可约，如果 $R_u(G)\subset\{I\}$。G 称为单群，如不会真的无穷闭正则子群。线性代数群 G 称为环面，如果同构于 $T(m)$，G 的极大环面的维数称为 G 的秩。

结构定理：

（1）连通群为半单群与根基的半直积。

（2）连通群为可约群与幂么根基的半直积。

（3）可约群同构于半单群和中心的准直积。

（4）半单群同构于单子群的准直积。

这里准直积表示因子两两的交为有限群。

3．保莱尔子群

下面我们称 K 上线性代数群为 K 群。1956 年保莱尔的奠基性著作引进关键的概念——保莱尔子群。由于它是连通可解

群，他首先得出下列的定理（连通可解群定理）：若 G 为连通、可解 K 群，则

（1）G 的幂么元素集合 Gu 是连通、正规、幂么代数子群。

（2）G 的所有极大子环面是共轭的，如 T 是极大环面，则 G 是代数群的半直积 $T\times Gu$。

（3）若 $S\in G$ 是半单元素，则 S 包含在一个极大环面中，S 的中心化子是连通代数群。

保莱尔不动点定理 设 G 为连通可解 K 群，假设它作用在 K 上非空射影代数簇上，则 G 在 V 中具有不动点。

这样，保莱尔定义保莱尔子群 B 为 G 中极大的连通可解代数子群。1965 年，他和蒂茨在可约群的著名论文中又引入抛物子群这个重要概念。抛物子群 P 是 G 中包含保莱尔子群的任何代数子群，而且 P 是连通的。

它们的重要性由下面一些结果可以看出：

（1）抛物子群的刻画定理：P 是抛物子群当且仅当 G/P 是射影代数簇。

由此可以得出：

（2）共轭定理：G 的所有保莱尔子群均彼此共轭，而且 G 的所有极大环面也彼此共轭。

（3）正规化子定理：抛物子群 P 和保莱尔子群 B 均分别同构于它们在 G 中的正规化子。

（4）密度定理：G 为任何一个保莱尔子群 B 的所有共轭的并集，G 的任何元素都属于某个保莱尔子群。

由此可推出：

（5）连通性定理：G 的任何子环面在 G 中的中心化子是

连通的。

无疑，K 群结构中最重要的是根基和幂么根基。薛华荔在 1957 年证明如下的刻画定理：

设 T 是 G 中一个极大环面，则 G 的根基 R（G）为所有包含 T 的保莱尔子群 B 的交的么元组分。而 G 的幂么根基是所有包含 T 的保莱尔子群中幂么元集合 Bu 的交的么元组分。

由此推出，如 G 是可约的，则 G 的任何子环面的中心化子也是可约的。从而极大环面 T 的中心化子与 T 重合。

4. 可约代数群的分类

研究可约代数群，最早的模式是参照复半单李群。从历史上看，复半单李群的复杂性被简化为复半单李代数，继而复半单李代数再进一步简化为根系、邓金图、外尔群等十分单纯的概念。最早，薛华荔也是如法炮制，但一到特征 $p>0$ 的域，往往出现病态而行不通。因此 20 世纪 50 年代和 60 年代基本上是绕过李代数，直接定义根系和外尔群。其后又通过其它方法定义李代数，因为它们还有用处。但对线性代数群，采取了其它的方法。为此法国数学家德马瑞尔（Demazure, Michel）在 1970 年引进根集（*root datum*）的概念。

这里起主要作用的是环面 T，对应于 T，我们有特征标群 X^*（T）及其对偶群 X_*（T）。

X^*（T）是由所有 K 群同态

$$x: T \longrightarrow GL(1, K)$$

构成的抽象阿贝尔群。X_*（T）是所有 K 群同态

$$u: GL(1, K) \longrightarrow T$$

构成的抽象阿贝尔群，实际上是 T 的单参数子群。

当 T 为环面时，X^*（T）和 X_*（T）都是有限秩自由

阿贝尔群，存在对偶配对

$$P: X^{*}(T) \times X_{*}(T) \longrightarrow Z,$$

$$(x, u) \longrightarrow P(x, u)$$

满足对于任一 $t \in K^{\times}$，$x(u(t)) = t^{P(x,u)}$。

当 T 为 G 的极大环面时，则 G 的伴随表示 Adx 在 T 上的限制为 T 的一维表示的直和$\sum$，则非平凡特征标 $\alpha \in X^{*}(T)$ 为 G（关于 T）的根，如

① $\alpha \in \sum$；

② 如 S^{α} 为 α 的核的么元的组分（它是 T 的余维 1 的子环面），则其中心化子是不可解。根集记作 Φ。由此配对时，对任何 $\alpha \in \Phi$，存在 $\alpha^{v} \in X_{*}(T)$，使得 $\langle \alpha, \alpha^{v} \rangle = 2$，$\alpha^{v}$。

实际上对于任何有限秩自由阿贝尔群 X，X^{v}，它们通过对偶配对互相对偶，ϕ，ϕ^{v} 分别为 X，X^{v} 的有限子集，则 $\psi = (X, \phi, X^{v}, \phi^{v})$ 称为根集。对于每个根集 ψ，可以定义其外尔群 $\overline{W}(\psi)$ 如下：

假定给出 ϕ 到 ϕ^{v} 上的双射

$$\phi \longrightarrow \phi^{v},$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha^{v}。$$

定义 X 和 X^{v} 的自同构 S_{α}，

$$S_{\alpha}X = X - (X, \alpha^{v})\alpha,$$

$$S_{\alpha}X^{v} = X^{v} - <\alpha, X^{v})\alpha^{v},$$

它们满足下列公理：

$RD1$ 如 $\alpha \in \Phi$，则 $\langle \alpha, \alpha^{v} \rangle = 2$。

$RD2$ 如 $\alpha \in \Phi$，则 $S_{\alpha}\phi \subset \phi$，$S_{\alpha}\phi^{v} \subset \phi^{v}$。

则 S_{α} $(\alpha \in \Phi)$ 生成 X 的有限自同构群，称为根集 ψ 的外尔群。

对于连通 K 群 G 及其极大环面群 T，其外尔群 $\overline{W}$（T，G）可看成由 G 的内自同构群诱导的 T 的自同构群，而且

$$W(T,\ G)\cong\frac{N(T)}{Z(T)},$$

其中 N（T）表示 T 在 G 中的正规化子，Z 表示 T 在 G 中的中心化子。

根集的重要意义在于可约 K 群 G 唯一由根集决定，这也是德马瑞尔证明的。另一方面，对于任何根集 ψ，都存在连通可约 K 群 G，具有极大环面 T，使 ψ（G，T）$\cong\psi$。

由于存在性定理及唯一性定理的证明，可知连通、可约 K 群由根集来分类，而且分类不依赖于域 K。由此可知紧连通李群和复连通、可约李群都由根集分类。

5．布吕阿分解与蒂茨系

到现在为止，我们的线性代数群还多少是复李群的影子，而代数群真正的新创造，则来自法国数学家布吕阿和原籍比利时的数学家蒂茨，他的大名我们在前面已多次见过。

布吕阿在 1956 年首先对李群发现布吕阿分解，其后盖尔范德及纳伊马克推广到一般线性群 GL（n，K）。对有限域斯坦因伯格早在 1951 年，薛华荔在他著名的《东北数学杂志》的论文中都引入过。布吕阿分解完全越过根系的复杂过程，直接用群论的术语来定义外尔群，并且得到一般的群的分解。

若 G 为连通可约 K 群，B 为其保莱尔群，T 为 G 中的极大环面包含在 B 当中，N 为 T 在 G 中的正规化子，$W=N/T$ 称为 G 的外尔群。如 $w\in W$，则有布吕阿分解：

$$G=\bigsqcup_{w\in W}BwB,$$

BwB 是群的双陪集，两两互不相交。

1961年蒂茨为了更深入地理解布吕阿分解，引入 BN 对理论，它不仅把李型单群系统化，即用同一观点处理，而且使群论和几何建立起新的联系，造成群和几何关系的第二次革命。布尔巴基后来把 BN 对称为蒂茨系，但 BN 对更为直截了当。

蒂茨系 蒂茨系是一个群 G 或四元组 (G, B, N, S)，其中 B，N 为 G 的两个子群，$W=N/B\cap N$，S 为 W 的一个子集，满足下列4条公理：

$T1$ $B\cup N$ 生成 G，$B\cap N$ 是 N 中正规子群。

$T2$ S 生成 W，S 由 G 中 α 阶元素构成。

$T3$ 若 $s\in S$，$w\in W$，则 $sBw\subset BwB\cup BswB$。

$T4$ 若 $s\in S$，则 $sBs\not\subset B$。

由这4条公理，可证明 G 具有布吕阿分解，而且还可推出在 G 是连通可约 K 群情形下，$B\cap N=T$。而且在一般域，特别是有限域，它可用来证明 G 是单群。蒂茨系还可用来描述所有 B 中包含 B 的子群，特别是抛物子群，而只用 G 的根系即可，这使结构理论极为漂亮而简洁地构造出来。

第三篇　拓扑学

1 导言

拓扑和拓扑学来源于 *topology* 的音译，正如几何学来源于 *geometry* 的音译一样。但是，*geometry* 已经没有其它的含义了，而 *topology* 还有其它三种含义：

（1）地形学、地志学；

（2）局部解剖学；

（3）物体的表观状态。

这些语义要比拓扑学早得多，也与 *topos* 的本义更为接近。众所周知，几何学的字源来自 *geo*，这来自希腊文（*ge*）地球的意义，地球科学大部分仍然使用 *geo* 这个字头，如地理学（*geography*）、地质学（*geology*）、大地测量术（*geodesy*）、地貌学（*geomorphology*）、地球化学（*geochemistry*）等等。只有几何学除了与地球测量的历史渊源之外，与地球完全脱离关系了。因此更正确的中文译名应是形学。

拓扑学的字源来自 *topos*，原义为位置、地点、地方、场所、地区，带有表现、局部的性质。因此，*topology* 许多其它的含义来源于这里。但是现在的拓扑学已经大大抽象，离开这些含义很远了。不过在历史上，*analysis situs*（位置分析）曾使用很长时期，其中 *situs* 来源于拉丁语“位置”的意思。这两个名词的共同点是位或位置，因此，拓扑学的直译应是

“位”学，这在日本人的译名中多少反映出来。日本人把涉及拓扑的往往译成“位相”，他们有：

位相数学——一般拓扑学；

位相空间——拓扑空间；

位相几何——（几何）拓扑学（一般也包括组合拓扑学或代数拓扑学）；

位相解析——泛函分析。

日本人这些翻译多少避免拓扑学两种来源和两条发展道路的混淆，即一般拓扑学和代数拓扑学。前者来源于数学分析，最终研究一般的拓扑空间和一般的拓扑结构，而后者来源于几何，实际上是一种几何学的分支。虽然我们在这个几何分支中也用到一般拓扑学的概念，但是着重点是不相同的。我们这一部分讨论的主要是后者，其重点是图形的几何拓扑性质。但是，拓扑学与几何学所研究的几何性质仍有所不同。

19世纪以前的几何学，用代数方法和分析方法来研究，对图形的性质研究得十分精细。但是在实际问题当中，许多问题无须那么精细或者根本达不到那么精细。例如，地球的形状说是球形，实际上有山有谷，坑坑洼洼，不是一个光滑的圆球。在电流产生的静磁场中，沿着一条闭曲线的磁场强度的积分总等于零，只要曲线中没有电流存在。这个积分与闭曲线究竟是圆，还是椭圆，还是弯弯曲曲的闭曲线都没有关系，也就是说只与曲线的拓扑性质有关。所谓拓扑性质，就是几何图形在弯曲、变形、拉大、缩小下仍然保留的性质，只是在这种变形过程中原来不在一起的点不能粘在一起，原来在一起的点也不能断开，也就是图形变换前后每点附近的点在变换后仍然在该点的附近。这种变换和它的逆变换都是连续的一一对应，称

为同胚。在拓扑学中，一个图形和与它同胚的图形称为拓扑等价。拓扑学就是研究图形的拓扑性质，也就是图形在经过连续变换下，保持不变的性质，而不研究其它的几何性质。

正如群论不仅研究群的结构而且研究群与群之间的映射和同构一样，拓扑学作为一门结构数学，不仅研究图形的拓扑性质，同时也研究图形与图形之间的各种映射。不可否认，一般来讲，映射的研究是远为复杂的问题。

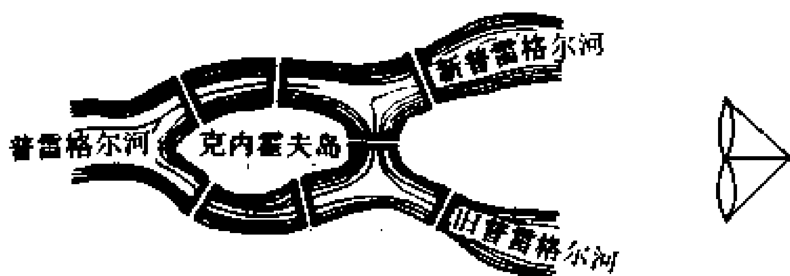
2 直观拓扑学

拓扑学一般多研究高维的空间和流形，这些我们较难有一个直观的形象。不过在我们所在的三维空间中，曲线、曲面和各种立方体也有许多直观的拓扑问题，下面举出一些例子。

2.1 哥尼斯堡七桥问题

第一个拓扑问题是欧拉在 1736 年解决的哥尼斯堡的七桥问题。

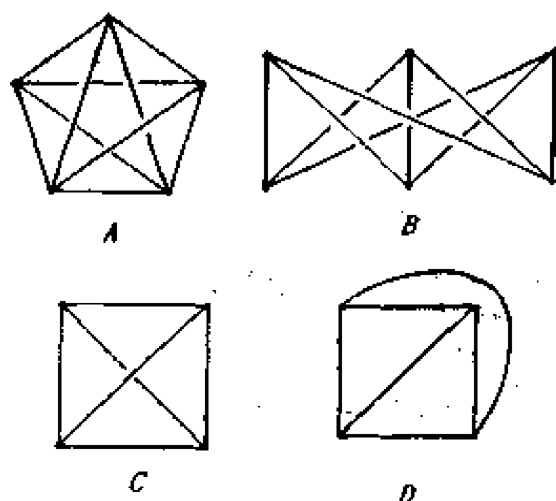
哥尼斯堡是东普鲁士的首府，这座历史名城产生过大哲学家康德和大数学家希尔伯特。普雷格尔河横贯哥尼斯堡城中，其上有七座桥，如下图所示。



问题是，我们能否散步经过每一座桥，而且只经过一次。欧拉证明这不可能。他的数学才能就表现在他把这问题化成上图中右图的形式，然后证明不存在一笔画法把这图画出。

2.2 平面布线问题

另外一个拓扑性质的问题是，一个线路能否布在平面上而不自相交叉。这类问题称为嵌入问题，如下图中 A，B 两个线路图就无法布在平面上而不自相交叉。但是 C 这样的桥形线路就可以通过把一条对角线移到正方形外面而不自相交叉（如图 D）。因此 C 可以布在平面上，A，B 就不行（要不交叉就要用分层、穿孔等办法弄到空间去，线路画起来、看起来都麻烦）。现代的电路十分复杂，你当然希望知道它能不能布在平面上而不自相交叉，这就要靠拓扑学了。1930 年，波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski，Kazimierz，1896—1980）证明：A，B 两图是一个图不能嵌入到平面中去的仅有障碍。也就是说，一个图能够嵌入到平面中去的充分必要条件是它不含有像 A 和 B 那样的部分图。



2.3 多面体的欧拉公式

欧拉公式是多面体的顶点数、棱数和面数之间的一个关

系。尽管多面体可以千变万化，这个关系却一定满足，也就是这个关系反映了多面体的本质的拓扑性质。

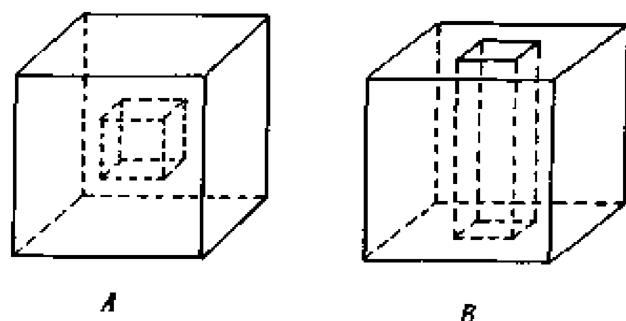
正多面体是最早的研究对象。对于任何正多面体，若用 V 表示顶点数，E 表示棱数，F 表示面数，那么我们数一下，就可以得出下面的表：

正多面体	V	E	F
正四面体	4	6	4
正六面体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

尽管这些数目各不相同，却可以发现，$V-E+F$ 都等于 2，这是不是巧合呢？进一步研究更复杂的多面体，发现这公式也对。笛卡尔是知道这个公式的。1750 年，欧拉首先宣布他发现这个公式，随后又给出了一个证明。尽管他的证明不对，这个公式后来还是被称为欧拉公式。对于某些特殊情形，有些数学家证明了这个公式。但是在 1813 年，瑞士数学家路易耶（L'Huilier，Simon-Antoine-Jean，1750—1840）发现欧拉公式并非对任何多面体都成立。比如，一个正立方体中挖去一个小的立方体，数一下就知道 $V-E+F=4$（图 A）；要是把小立方体上下都挖通（图 B），则 $V-E+F=0$。

那么欧拉公式在什么条件下才成立呢？经过许多数学家研究，发现只要多面体是实心的（里面没有空洞），只有一个外表面，并且这个表面可以变形成为球面，那么欧拉公式就成

立。像下面图 B 那样的多面体，只有一个外表面，而且外表面可以变形为环面（和内胎相似），那么不管多面体如何变形，都有 $V-E+F=0$。



2.4 若尔当定理

几何学中最简单的概念是曲线，但是在拓扑学里，曲线并不太好定义。法国著名数学家若尔当在 1882 年用参数方程加以定义：曲线是平面上的点集，其坐标是参数 t 的连续函数

$$x=\phi(t),$$
$$y=\psi(t),$$

t 在区间〔a，b〕取值。所以若尔当定义下的曲线无非是区间的连续。曲线两端连在一起就是闭曲线。如果闭曲线没有自交点，则称为简单闭曲线。简单闭曲线实际上是圆的连续象。如果把这条闭曲线画在橡皮膜上，当橡皮膜连续变形时，曲线的长度及包围的面积可以改变。但是根据拓扑的定义，它的拓扑性质不会改变。其中曲线的一个拓扑性质从直观上极为显然：平面上一条简单闭曲线 C 恰好把平面分成两个区域：一个是内部，一个是外部，它们均以 C 为边界。这样，平面上的点分成两类：C 内部的点和 C 外部的点。同一类中任意两

点都能用一条不与 C 相交的曲线相连接，而连接分属两类的点的曲线必定与 C 相交。而且，这两个区域一个是有界的，一个是无界的。对于有界区域中任何一点 x，以及 C 上任何一点 x_0，总可以连接一条简单弧以 x 及 x_0 为端点，且除了 x_0 之外，整个弧都在有界区域之内。这称为舍恩夫利斯定理。

由于这个定理直观上很显然，一直到若尔当才认识到有必要正式表述这个定理并加以证明。若尔当的证明非常长而且复杂，后来还发现其中有问题，最主要是许多直观的概念，特别是曲线和内部、外部这些概念需要更严密的分析，拓扑学就是考虑这些问题的。

由于问题的复杂性，若尔当曲线定理一直到 1905 年才由美国数学家维布仑（Veblen, Oswald, 1880—1960）首先严格证明。这个定理很快推广到高维：n 维欧几里得空间 R^n 中 $(n-1)$ 维子流形如果同胚于 $(n-1)$ 维球面 S^{n-1}，也把 R^n 分成两部分，且该子流形是两部分的公共边界。法国数学家勒贝格证明 $n=3$ 的情形，荷兰数学家布劳威尔（Brouwer, Luitzen Egbĕrtus Jan, 1881—1966）证明一般的情形。

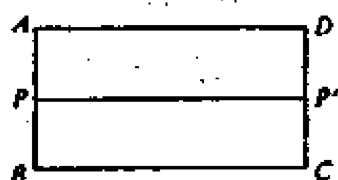
库拉托夫斯基证明了强化的舍恩夫利斯定理：存在一个由闭单位元 D 的同胚，它把 D 的边界 S' 映到 C 上，把 S' 内部映到 C 的内部上。但这定理在高维情形是错的。作为反例，美国数学家亚历山大（Alexander, James Waddell, 1888—1971）举出他那著名的"角球"。

2.5 单侧曲面

1．莫比乌斯（Mobius, August Ferdinand, 1790—1868）带

莫比乌斯带是最简单的单侧的有边缘曲面。双侧曲面与单侧曲面有明显的不同。设想曲面是由薄膜做成的。如果从薄膜的一侧出发存在一条道路到达曲面的另一侧，中途不允许越过边缘，也不允许穿过薄膜，那么这种曲面称为单侧曲面，否则称为双侧曲面。另一个特征是双侧曲面，我们总可以分成内外两面，各涂上一种颜色，例如红色和蓝色，它们不会相混，而单侧曲面只能涂上一种颜色。

莫比乌斯带在日常生活中也可见到，当把皮带扭个弯再插到孔中，就得到一个莫比乌斯带，这时你会发现皮带的反面翻到上面来。更具体的做法是：找一张细长的长方形纸条 $ABCD$（如下图），如果把两边 AB 和 CD 粘起来，使 A 与 D 重合，B 与 C 重合，则得到一圆筒形带，正确的皮带也是这样的，它有一个正面，一个反面，可以涂上两种不同的颜色。可是要在两端粘在一起之前，扭转 180°，使得 A 与 C 重合，B 与 D 重合，就得到莫比乌斯带，显然这种曲面是单侧的。小虫沿着 PP' 直线爬行时，它不越过边缘就从一侧爬到另外一侧。



莫比乌斯带和圆筒形带还有两个明显的不同之处：

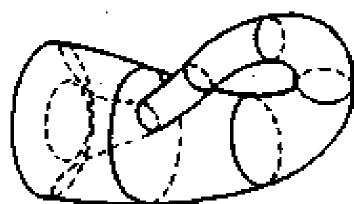
(1) 圆筒形带沿 PP' 剪开后成为两个圆筒形带，而莫比乌斯带沿 PP' 剪开后还是连在一起，成为更大的莫比乌斯带。

(2) 圆筒形带的边缘是两条闭曲线（圆周），而莫比乌斯带的边缘只是一条闭曲线。

单侧曲面为我们引进一种最重要的拓扑性质——可定向

性。一个曲面的可定向性，是指整个曲面都存在一种相互谐和一致的方向规定，这种规定不能由点在曲面上的移动而破坏。在莫比乌斯带上，我们在 PP' 可以规定一个 x 轴，方向沿 PP' 的走向，而 y 轴方向是垂直于 x 轴且从 x 轴到 y 轴是逆时针方向的，那么在它们相交之处的点周围的小闭曲线都是逆时针方向的。但是，再次走到 $P'=P$ 点时，这个定向反了过来，小闭曲线由逆时针方向变成顺时针方向，或者 y 轴由向上变成向下。这种现象在圆筒形带或球面上是不存在的，这些曲面称为可定向的。因此，不可定向性与单侧性是同一拓扑性质。

把两条莫比乌斯带沿着边界粘接起来就成为克莱因瓶（如图)。克莱因瓶也是一个单侧曲面。不难看出，克莱因瓶同环面的不同之处在于：环面有里、外两面，一个小虫在外面爬时，永远也爬不到里面去；可是看看克莱因瓶，它上面的小虫可以从里爬到外，又从外爬到里，一句话，这是一个不分里外面的曲面（所以称为单侧曲面)。一个双侧曲面，一个单侧曲面，差别如此之大（当然不能相互变形)，可是欧拉—庞加莱示性数却相等，都是 0。



2．射影平面

平面上通过原点的所有直线构成了一个一维空间，称为射影直线。它到底是什么样呢？如果我们用一个点来代表一条直线的话，它就是一个圆周，因为每一条直线都与一个圆周交于

一条直径的两个端点，因此这两个点就代表这条直线，把这两点粘合在一起看成一个点，也就得到一个半圆，把两端粘起来，它仍然是一个圆周，因此圆周就是一维射影直线的图象，只不过这时以点为元素了。

射影平面是通过三维空间中所有通过原点的直线构成的，我们如法炮制，它相当于把单位球面的直径对顶点粘在一起构成的曲面，这个曲面可不再是球面了，而是射影平面。

射影平面可以通过下半球面加上赤道直径对顶点粘合而成。我们把赤道用四边形 $ABCD$ 表示，目的是把 AB 与 CD 粘合，DA 与 BC 粘合。为此，我们把 A 和 C 拉高，B 和 D 拉下，最后把 A 和 C，B 和 D 粘在一起，而且 AB 和 CD，DA 和 BC 相重合，这样就得到自交于一条直线的闭曲面，它就是射影平面。看起来它像球面，但它不是球面。如果我们切掉下半部分，我们得到的是一个交叉帽，它是又一个莫比乌斯带的模型。因此射影平面也是单侧曲面，即不可定向曲面。

交叉帽有一条自交线和两个奇点。希尔伯特的学生鲍伊(Boy，W.) 造出一个射影平面，它没有奇点，但自交线还保留，这实际上是不能去掉的。要想造出又没有奇点，又没有自交线的射影曲面只有到四维空间才行。而且我们可以给出四维空间（x，y，z，t）中射影平面的代数方程，即

$$\begin{cases} y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=yzt, \\ y(z^2-t^2)=xzt。\end{cases}$$

2.6 曲面的拓扑分类

从拓扑上看，曲面可以分为三类：开曲面，有边缘曲面，闭曲面。其中开曲面非常复杂，还不能完全分类。有边缘曲面

则依赖于闭曲面的分类。而经过长时期的努力，数学家对于无边缘的封闭曲面可以给出一个完满的拓扑分类，这是数学中很少几个漂亮的结果之一。

在分类过程中通常是找区别不同曲面的拓扑性质及拓扑不变量，当把这些性质和不变量找完全时，拓扑分类也就完成了。幸好，闭曲面的拓扑不变量只有一个，这就是欧拉–庞加莱示性数 χ，它可以从剖分得出，即

$$\chi = \text{顶点数} - \text{棱数} + \text{面数}。$$

它同直观的拓扑不变量——亏格 g 也有关系

$$\chi = 2 - 2g。$$

区别闭曲面的拓扑性质是可定向性，也就是它是双侧曲面还是单侧曲面。因此，闭曲面分成两个系列，它们可以通过标准的方法造出来。

对于定向的闭曲面，我们可以从球面出发，加上若干环柄构成。环柄可以看成两头开着的圆管，在球面上开两个圆孔，再把圆管两端分别与这两个圆孔粘在一起，这样就得到了一个孔洞的环面，它的亏格为 1，$\chi = 0$。同样在球面上其它地方再开两个圆孔，再接上一个环柄，就可以得到两孔的环面。总之，所有定向曲面都可以采用这个方法在球面上安装若干环柄构成，它们的环柄数 $= g$，而 $\chi = 2 - 2g$。

不可定向曲面也可以如法炮制，不过这一次在球面上开的圆孔上安装的不是环柄，而是莫比乌斯带。由于莫比乌斯带是一头封死的交叉帽，所以它的边是一个圆周，因此在球面上每个圆孔上都可以安装一个交叉帽。在球面上安装一个交叉帽就是射影平面 $\chi = 1$，安装两个交叉帽就是克莱因瓶（$\chi = 0$），因此安装 n 个交叉帽的不可定向曲面 $\chi = 2 - n$。

这样一来所有闭曲面不过是同安装若干个柄的环面同胚，闭曲面的分类大功告成。对于有边缘的曲面，它们同胚，则除了所在的闭曲面同胚之外，还要求边缘的圆周数目相等。

从直观上一眼就能看出，球面与环面有很大的差别，最明显的就是环面有一个空洞而球面没有。因此，如果不准撕坏、粘合，由一个球胎是不能变形成轮胎的，反过来，轮胎也不能变形成球胎。这反映出它们的拓扑性质有着本质的差别，曲面上的这个空洞数是曲面最重要的拓扑不变量，称为亏格，用 g 表示。球面的亏格为0，轮胎面的亏格为1，显然还可以造出 $g=2$，$g=3$ 等封闭曲面，它们具有 g 个空洞，曲面的拓扑性质都与 g 有关。

我们来看一下球面与环面的差别。在球面上画一个圈圈，你会发现，它可以在球面上连续变形，最后缩成一点，这个性质称为单连通。但是在环面上，不是所有的圈圈都能这样连续地变形。例如，当这个圈是绕环面的圈时就不能缩为一点，因此，环面不是单连通的。为了描述单连通性，庞加莱引进一个拓扑不变量——基本群，用 π_1 表示。当 $\pi_1=0$ 时，曲面就是单连通的，而 $\pi_1\neq0$ 时则不是单连通的。π_1 越复杂，表示它与单连通差距越大。

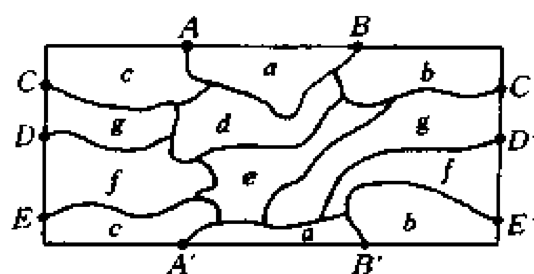
另外一个拓扑性质是分割性。一个圆总可以把球面分成两块，它们互不连通，但都以这个圆为边界。但是，一个圆不一定能把环面分成两块，例如把自行车轮胎垂直剪断，它没有变成两段，还是一段，只不过变成一个弯管。两个圆有时也不行，但是，要是在环面上再剪一个圆圈，那么任意这样三个圆圈一定可以把环面分成两块（或两块以上）。这个发现很有一般性，对于有 g 个空洞的环面存在 $2g$ 条闭曲线，不能把这个

环面分成两块，但任意 $2g+1$ 条闭曲线总可以把亏格为 g 的环面分成两块。因此我们把 $2g+1$ 称为曲面的连通度，这就是说，g 越大，把它们剖分开越困难。

同样，对于有 g 个空洞的环面来说，虽然我们在环面上能画 $2g$ 条闭曲线，但最后环面还连成一片，但是 $2g$ 条闭曲线必定是相交的。要想闭曲线互不相交，又能使划分结果连成一片，最多只有 g 条闭曲线，多了就一定相交。

2.7 四色问题

四色问题：在平面或球面上绘制世界或全国地图，使得相邻的国或省涂上不同的颜色来加以区别，问最少需要使用多少种颜色。在上一世纪就已经证明，5 种就够了，并且猜想 4 种颜色也足够。1976 年哈肯（Haken，Wolfgang，1928—）和阿佩尔（Appel，Kenneth）借助计算机证明了这个四色猜想，引起世界轰动。为什么说这个问题是拓扑性质的呢？因为四色猜想只对平面、球面上的地图成立，但是对于环面（内胎表面）上的地图就不对了。可以证明，在环面上绘制地图至少需要 7 种颜色（如图），这是因为球面和环面在拓扑上不一样，也就是说，你把球面拉拉扯扯，只要不破，不粘上其它东西，它可以变大、变小、变长、变扁，但还是个球面，总也变不成环面；反过来，环面经过弹性变形之后也变不成球面。这样我们就说它们在拓扑上不一样，在它们之上绘制地图所需最小的数目——色数，也就成为反映这两类曲面拓扑性质的数量了。拓扑学告诉我们怎样找一些数量来区别开在拓扑上不一样的图形，并且把它们加以分类。



把图中上边和下边叠合（使 A 和 A'，B 和 B' 重合），左边和右边叠合（使 C 和 C'，D 和 D'，E 和 E' 重合），这就得到一个环面上的地图，这个地图必须用 7 种颜色才行。

3 拓扑学的早期历史

首先把拓扑学界定为研究这类性质的学科的是莱布尼茨。1679 年他用位置几何（*geometria situs*）来称呼它，但他并没有具体的结果。第一个实质性的反映拓扑性质的拓扑不变量是凸多面体的欧拉示性数，也就是任何凸多面体，顶点数－棱数＋面数＝2，这个公式被称为欧拉公式。实际上，在 1752 年欧拉发表这个公式的证明之前，笛卡尔在 1620 年也知道这个公式，莱布尼茨也有一份笛卡尔手稿的抄件，但到 1860 年才为数学史家知道。有些数学史家认为，阿基米德也可能知道这个公式，因为归根结底，古希腊对多面体有相当研究。不过，所有这些研究并没有涉及其拓扑不变性。因此，直到 19 世纪末，这个公式都在多面体的几何学框架中加以讨论。从历史观点看问题，此过程中，在认识上也曾取得许多进步：19 世纪初把欧拉公式推广到非凸多面体，更重要的是，其后不久推广到有孔的多面体，1863 年莫比乌斯推广到任意可定向曲面，19 世纪 50 年代起，推广到任意高维多面体——多胞形（*polytope*）。

总之，虽然找到了拓扑不变量，并且还有许多数学家通过它对多面体进行分类，但终究没有找到拓扑学合适的对象及问题。

1736 年欧拉解决哥尼斯堡七桥问题，被称为图论的开始，

这类一笔画问题以及地图最小着色数（平面及球面上 4 种颜色足够，而在环面上至少要 7 种不同颜色）、图是否可嵌入在平面中等问题本质上是拓扑学的问题，但现在多归入图论范畴。

另外一类一维图形的问题是纽结与环结，即一个或多个圆 S^1 在 R^3（三维空间）或 S^3（三维球面）中的嵌入（安置）问题。这类问题在 19 世纪已有很多研究，最近更是有重大发展及应用，不过在当时同样没有“拓扑的”意识。可是，正是这些对象的理论成为第一部以“拓扑学”命名的专著的主要内容。这部著作是 1847 年出版的李斯亭（Listing, Johann Benedikt, 1806—1882）的《拓扑学引论》，其后拓扑一词在数学中逐步出现。

真正把拓扑意识带给数学的是黎曼。黎曼几乎可以代替庞加莱成为拓扑学的奠基人。他已经有比较明确的拓扑对象（可定向曲面）、重要的问题（分类这些曲面）以及处理问题的方法（横截方法），而且圆满地解决了这个问题，对于复分析和代数函数论（代数几何的前身）起着划时代的作用。只不过他画龙没有点睛，仅仅着眼于分析（无疑这是分析的一大成就），而没有推陈出新，扩大战果，建立一般流形的拓扑学，因此黎曼的隐藏在分析背后的拓扑学即使建成一个曲面的拓扑学也还需要许多数学家半个多世纪的补充工作，其中包括下述几方面：

（1）19 世纪 60 年代，得出表示曲面的正则形式，并运用它解决可定向曲面的分类问题。

（2）1858 年莫比乌斯等人独立发现不可定向曲面——莫比乌斯带，1874 年克莱因引入克莱因瓶，它是不可定向的闭曲面，可以看成两条莫比乌斯带沿边粘在一起而成。大约同

时，引入另一个不可定向闭曲面——射影平面。

（3）1877 年前后，克里福德（Clifford, William King, 1845—1879）和克莱因独立地得出曲面的环柄理论，即任何闭曲面可以通过在球面上安装若干环柄和若干个交叉帽（莫比乌斯带）构成。

（4）证明闭曲面的分类定理，严密的拓扑证明经历半个多世纪到 20 世纪初才完成。

紧曲面的拓扑学为以后的拓扑学树立了一个典范。我们知道全组的不变量：可定向性，欧拉示性数 χ，如果有边缘的话，还要加上边缘的数目，而且通过全组不变量得到它们的完全分类。

1895 年，当时最伟大的数学家庞加莱发表他的主要论文《位置分析》，共 120 页，这篇大论文连同其后发表的 5 篇补充（1899，1900，1902，1902，1904）共同构成组合拓扑学的主要骨架，从而宣告这门新学科的诞生。

庞加莱作为有史以来最有影响的大数学家之一，开创了许多新领域。在每一个新领域，他都相当完整地建立一个体系，以至几十年后还是一个典范。他的思想是如此卓绝且超越时代，以至于其后的进展不仅遵循他所指出的道路，而且许多他没能克服的困难一直留到今天。他建立的微分方程定性理论、动力系统理论以及分形和混沌等概念，近年来又成为大热门，而像极限环理论，经过 100 多年的反反复复，并没有推进太多。

庞加莱的拓扑学工作源于他的定性理论以及天体力学等的工作，其核心思想是，在许多情况下，我们不可能求出精确解，这时我们可以通过定性的或较为粗糙的方法抓住解的本质

特征，而拓扑学实际上就是反映诸如流形的这类最基本、最普通的特征的。庞加莱对拓扑学的贡献可以概括如下：

(1) 以一般流形以及把它们三角剖分之后构成的复合形为拓扑学的研究对象。

(2) 对 n 维流形建立一般的欧拉公式，从而把欧拉示性数 χ 推广到一般情形。

(3) 一般维的流形拓扑分类当然极为困难，远不像曲面那样，由 χ 及可定向性就可以概括。为此庞加莱引进新的拓扑不变量，其中最主要的是同调和基本群。

同调不变量主要是贝蒂数和挠系数。对于 n 维流形，对于每 q，$1\leqslant q\leqslant n-1$，定义 q 维贝蒂数 b_g。1900 年，他首先引进挠系数，庞加莱还通过“关联矩阵”给出它们的计算方法。

在 1895 年的论文中，他首先引进非数值的不变量——基本群 π_1，π_1 在拓扑学乃至许多数学领域有着根本的重要性。

(4) 对定向闭 n 维流形证明一般性定理——庞加莱对偶定理：$b_k=b_{n-k}$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，它可以说是流形论的基本定理。

庞加莱建立了组合拓扑学的基础。当然，要使它成为一门充满生命力的学科，它必须有一系列问题，其中有些也是庞加莱给我们留下的。

(1) 流形的拓扑分类问题。庞加莱首先考虑的是仿照曲面的拓扑分类来分类三维流形。庞加莱已经知道，有相同贝蒂数的三维流形有无穷多互相不同胚，同样有相同同调的也不止一种。这样庞加莱猜想，同调加上基本群也许是不变量完全组。庞加莱生前既没能证明也没能否证。1919 年美国数学家亚历

山大举出反例，他举出两个棱镜空间，它们的同调及 π_1 对应相等，但不同胚。这宣告三维流形问题极端困难。时至今日，甚至更基本的问题，如庞加莱猜想——三维单连通（$\pi_1=0$）的闭流形必同胚于 S^3，也尚未得到证明或反证。拓扑学的发展转向更一般问题。

（2）基础问题。正如数学许多分支一样，庞加莱的拓扑学许多基础问题，并没有严密的证明。例如，贝蒂数、挠系数、基本群的拓扑不变性，到 1915 年亚历山大才证明同调的拓扑不变性。又如，拓扑不变性与组合不变性的关系问题。庞加莱所使用的是三角剖分组合方法，他自然提出，流形上是否都存在三角剖分，以及主猜想（*Hauptvermutung*），即两个剖分是否存在同构的子剖分。这个问题也是经过 60 多年才解决。

庞加莱创立的组合方法的有效性不容置疑，但是组合与拓扑之间还有一条鸿沟，组合方法的合法性有待证明。建立这个基础的是荷兰数学家布劳威尔，在 1909 年到 1913 年短短 5 年间，他创立单形逼近方法来证明拓扑不变性，其中特别证明维数的拓扑不变性，区域的拓扑不变性，并严格证明若尔当定理及其推广。

布劳威尔首先把前人所忽视的拓扑学的另一翼——拓扑映射理论创建起来，他证明了连续映射的不动点定理，建立了映射的拓扑度理论，由此产生的两个分支不仅在理论上是巨大突破，而且在应用上至关重要。例如，1967 年创立的不动点的算法是数理经济学一大进展。1926 年莱夫谢兹（Lefschetz, Solomon，1884—1972）得出著名的莱夫谢兹不动点公式。

影响拓扑学发展的另一个理论是庞加莱在 1881 年引进的向量场的指标概念及公式。1911 年布劳威尔将其推广到 S^n

上，1925年霍普夫将其推广到任意紧流形之上。

本世纪20年代，伟大的女数学家E·诺特开创了抽象代数这个崭新的领域，她启发拓扑学家，为什么一定要把拓扑不变量都弄成一个一个数呢？为什么不能把贝蒂数和挠系数看成一个群的元素呢？在她的影响下，拓扑学家开阔了眼界，把贝蒂数和挠系数又扩展成为同调群。这样一来，拓扑学的组合方法被推广成为代数方法，从而形成近50年来的代数拓扑学。

不过到20世纪30年代拓扑学主要研究同调论。从20世纪20年代到30年代陆续建立同调群，通过胞腔分解的计算方法，建立相对同调群，一般系数与局部系数同调群等。到30年代，代数拓扑学由于奇异同调、上同调、同伦等概念的引入而进入一个新时期。

两部拓扑学的经典著作总结拓扑学草创时期的成就：一部是沙爱福（Seifert, Herbert, 1907—）和特莱尔费尔（Threlfall, Wilhelm, 1888—1949）的《拓扑学教程》（1934），中国拓扑学的先驱之一江泽涵1949年把它译成中文出版，这本书的意义还由以下事情看出：它不仅译成俄文与西班牙文，还在1980年译成英文出版。另一部是亚历山大洛夫和霍普夫（Hopf, Heinz, 1894—1971）合著的《拓扑学》I（1935），由于当时的政局和拓扑学的发展，打算写的II卷从未问世。

作为这个时期的标志的是1935年在苏联莫斯科召开的国际拓扑学大会，几乎所有拓扑学的头面人物都出席了，还有后来对整个数学影响很大的冯·诺伊曼和魏伊，有人用这样的标题来表示这个时代的转折点——“拓扑学走向美国”。的确，欧洲已是山雨欲来风满楼了，从波兰、荷兰、奥地利、匈牙利、法国、德国等地来的流亡者已经加入到美国的拓扑学派中去了。

4 同调理论

同调理论是代数拓扑学的主线。对于拓扑空间来说，同调是其最主要的拓扑不变量。因此，对于任意拓扑空间，如何定义及计算其同调群及上同调群是最根本的问题。受到组合拓扑学的启发，正确定义复合形是其中的关键，也是进一步抽象和推广的必由之路。奇异同调的定义导致同调理论的公理化和上同调的发展，形成了代数拓扑学的基础，并为它的进一步发展铺平道路。

4.1 复合形与同调群

同调理论是代数拓扑学的基础，它依赖于一个空间剖分成为许多基本构件，这些基本构件称为单形：一个点 V_0 称为 0 维单形，一条线段 V_0V_1 称为一维单形，一个实心三角形 $V_0V_1V_2$ 称为二维单形，一个实心四面体 $V_0V_1V_2V_3$ 称为三维单形，k 维单形 $\sigma=V_0V_1\cdots V_k$，由 k 维欧氏空间 R^k 中的线性独立的 $n+1$ 个点构成的凸包，即向量 V_0V_1，V_0V_2，…，V_0V_k 线性独立，其子集称为面。

单纯复合形 在 R^n 中由有限个单形组成的集体 K 称为单纯复合形，如果满足：

(1) 如果单形 $\sigma\in K$，则它的所有面也属于 K。

(2) 如果 σ，$\tau \in K$，则或者 $\sigma \cap \tau = \emptyset$，或者 $\sigma \cap \tau$ 是 σ 和 τ 的公共面。

注意，单纯复合形 K 是单形的集合，它们的点的集合称为其基础空间，记作 $|K|$。如果一个拓扑空间经过剖分以后可以形成一个单纯复合形，则它称为多面体。

要定义同调群，首先给单形一个定向。在所有 V_0，…，V_q 的有序排列中，可归结为两种不同的定向，这样对于所有的 q 维定向单形 S_q 都可以定义一个函数

$$f: S_q \longrightarrow Z,$$

满足

$$f(-[\sigma_q]) = -f([\sigma_q]),$$

称为 q 链，K 的所有 q 链的集合称为 $C_q(K)$。它可看成 q 维单形整数导数的形式线性组合所构成的交换群。

对于 $0 \leqslant q \leqslant \dim K$ 和链复形 $C_q(K)$ 可定义边缘算子

$$\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K),$$

使

$$\partial_q [V_0 V_1 \cdots V_q] = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i [V_0 \cdots \hat{V}_i \cdots V_q],$$

$\wedge$ 表示去掉。

不难证明对于所有 q，

$$\partial_{q-1} \cdot \partial_q = 0。$$

我们定义 $Z_q(K) = Ker\partial_q$，

$$B_q(K) = Im\partial_q,$$

它们都是 $C_q(K)$ 的子群。

q 维同调群 我们定义 q 维同调群为商群

$$H_q(K) = \frac{Z_q(K)}{B_q(K)}.$$

它显然是阿贝尔群或交换群，而有限生成交换群的结构我们很清楚，即交换群 $H_q(K)$ 由两部分构成，一个是无挠群，它的秩称为 q 维贝蒂数，一个是挠群 $= Z_{n_1}\oplus Z_{n_2}\oplus\cdots\oplus Z_{n_k}$，$n_i \mid n_{i+1}$，$n_1$，$\cdots$，$n_k$ 称为挠系数。

显然，知道同调群和知道各维的贝蒂数和挠系数是一回事，在拓扑学发展的前三四十年，对于复合形或多面体，问题就是求其贝蒂数和挠系数。庞加莱已引入关联矩阵来解决这个问题。为了保证这个做法合理，1915 年亚历山大证明贝蒂数及挠系数是拓扑不变量，实际上是组合不变量，即在三角剖分的重分下不变。

由于剖分方法引起复杂的计算，一个自然的想法是减少剖分后单形的数目。但是一般仍然要有相当多的单形，其后一个简单的方法是胞腔剖分，每一维的胞腔为单位球面 S^n 除去一点 P 后的同胚象，它与单形剖分有很多不同：

(1) 不考虑单形的面；

(2) 不同的胞腔不相交。

因此，剖分可以大大简化，同样可以做成胞腔复合形，并计算其同调群。

通过胞腔分解，可以非常简单地计算出同调群。

(1) n 维球面 S^n，可以分解为两个胞腔 σ^0 和 σ^n，$C_0 = C_n = Z$，$\partial = 0$。

$$\text{因此}\begin{cases} H_0 = C_0 = Z, \\ H_n = C_n = Z, \\ H_i = 0, \quad i \neq 0, \quad n。\end{cases}$$

(2) 复射影空间 CP^n。

CP^n 中的点为$(Z_0:Z_1:\cdots:Z_n)$，其中 Z_i 为复数，至少有一个不等于 0，而且当 λ 为非 0 复数时，

$$(Z_0:Z_1:\cdots:Z_n)\equiv(\lambda Z_0:\lambda Z_1:\cdots:\lambda Z_n)。$$

我们考虑 CP^n 的胞腔结构，对于每实维 i，$0\leqslant i\leqslant n$，定义一个胞腔 σ^{2i} 为点集

$$\{Z_i\neq0,\ Z_{i+1}=Z_{i+2}=\cdots=Z_n=0\},$$

其特征映射 $\sigma^{2i}\longrightarrow CP^n$ 为

$$(Z_1,\cdots,Z_i)\longmapsto(Z_1:\cdots:Z_i:\sqrt{1-|Z_1|^2-\cdots-|Z_i|^2}:0:\cdots:0)。$$

因此 $$C_i(CP^n)=\begin{cases}0,\text{当 } i=2k+1,\text{或 } i>2n,\\ Z,\text{当 } i=2k。\end{cases}$$

由于边缘算子均为 0，因此

$$H_i(CP^n)=\begin{cases}0,\text{当 } i=2k+1,\text{或 } i>2n,\\ Z,\text{当 } i=2k。\end{cases}$$

(3)实射影空间 RP^n。

实射影空间 RP^n 中的点由坐标

$$(X_0:X_1:\cdots:X_n)$$

表示，两点相同，如果坐标差一个非 0 实数倍数，且至少一个 $X_i\neq0$。

RP^n 的胞腔结构由 σ_i 构成，它由集合

$$\{(x_0:x_1:\cdots:x_i:0:\cdots:0)\}$$

表示，其中 $x_i\neq0$。因此

$$C_i(RP^n)=Z,0\leqslant i\leqslant n。$$

但是 ∂ 不是处处为 0：

$$\partial\sigma_{2i-1}=0,$$

$$\partial\sigma_{2i}=2\sigma_{2i-1},$$

因此

$H_0(RP^n) = Z,$

$H_1(PR^n) = Z_2,$

$H_2(RP^n) = 0,$

$H_3(RP^n) = Z_2,$

……

$$H_n(RP^n) = \begin{cases} 0, 如\ n = 2k, \\ Z, 如\ n = 2k+1。\end{cases}$$

以上是取值于整数系数群 Z 的同调，但是，取值于其它阿贝尔群的同调，情况就有所不同。例如

$$H_i(RP^n; Z_2) = \begin{cases} Z_2, 0 \leqslant i \leqslant n, \\ 0, i > n。\end{cases}$$

而且整系数同调为 0 时，Z_2 系数却不一定为 0。因此，对于一般系数取自阿贝尔群 A 时，我们需要有一个公式：

万有系数公式

$$H_i(X;A) = (H_i(X;Z) \otimes A) \oplus \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X;Z);A),$$

其中 $\mathrm{Tor}(A, B)$ 称为阿贝尔群的挠积。

对于有限生成的阿贝尔群 A 和 B，

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Tors}A \otimes \mathrm{Tors}B,$$

其中 Tors 表示阿贝尔群 G 中所有有限阶元素构成的挠子群。

对于上同调群，有相对应的公式：

$$H^i(X;A) \cong \mathrm{Hom}(H_i(X);A) + \mathrm{Ext}(H_{i-1}(X);A)。$$

最早定义同调群的是奥地利数学家费陶里斯（Vietoris, Leopold, 1891—），他是 1927 年对于紧度量空间定义费陶里斯同调群，定义中用到度量，因此不够一般。1928 年亚历山大洛夫引进射影谱的概念，即逆向复合形序列来逼近紧度量空间，从而定义贝蒂数。庞特里亚金（Pontjyagin, Lev Semen-

ovich, 1908—1988)在 1931 年引入群的逆向序列，从而定义同调群。

捷克数学家切赫在1932年首先引入有限开覆盖的神经（*nerve*）的概念，从而为用复合形逼近任意空间打开了大门。代替逆向序列，他引进逆向系统，这样他定义任意空间的切赫同调群。这个定义是比较一般的。

但是，对于非紧空间，切赫定义不够满意。1950 年，道克尔（Dowker，Clifford Hugh，1912—1982）对切赫定义加以修改，特别是用无限覆盖代替有限覆盖，并得出满意的结果。

20 世纪 20 年代，主要是美国数学家莱夫谢兹以不动点定理为中心，把代数拓扑学推进到一个新阶段。对于交截、乘积和上同调，对于对偶定理、相对同调和奇异同调以及局部连通集都做出系统的发展。

(1) 昆尼特（Künneth，Hermann，1892—1975）公式

两个集合或两个空间的笛卡尔积是最常见的构造，在 20 世纪初还并不普遍。只有凯雷考虑过两个代数曲线的乘积。C·塞格瑞（Segre，Corrado，1863—1924）考虑过复射影空间的乘积，结果这两种乘积仍具有代数簇的结构。1908 年，史坦尼茨引入拓扑空间和两个拓扑空间乘积的概念，但是它们的拓扑不变量间的关系首先由德国数学家昆尼特和美国数学家莱夫谢兹独立得出。

昆尼特 1923 年发表 $X\times Y$ 的贝蒂数和挠系数，他证明

$$b_p(X\times Y)=\sum_{0\leqslant k\leqslant p}b_k(X)b_{p-k}(Y)。$$

由此可导出

$$\chi(X\times Y)=\chi(X)\times\chi(Y)。$$

更一般地，对于积复合形 $K\times K'$，有下列昆尼特公式成立：

$$H_r(K\times K';G)\cong\sum_{p+q=r}H_p(K)\otimes H_q(K';G)$$

$$+\sum_{p+q=r-1}\mathrm{Tor}(H_p(K),H_q(K';G)),$$

其中 Tor 为挠函子(见同调代数)。

(2)相对同调与局部同调

在 1927 年莱夫谢兹引入相对同调之前，人们只考虑某一空间或复合形的"绝对"同调，如果单纯复合形 K 有一个子复合形 L，莱夫谢兹首先定义相对同调群 $H_n(K,L)$，他考虑的链群就不是 $C_q(K)$，而是 $C_q(K)/C_q(L)$，而从边缘映射 ∂_q，诱导出相对边缘映射

$$\partial_q^r:\frac{C_q(K)}{C_q(L)}\longrightarrow\frac{C_{q-1}(K)}{C_{q-1}(L)},$$

从而相对同调群 $H_q(K,L)$就定义为

$$H_q(K,L)=\frac{(Ker\partial_q^r)}{(Im\partial_{q+1}^r)}。$$

实际上，对于 $q>0$，

$$H_q(K,L)\cong H_q(M),$$

其中 M 是由多面体$|K|$中把所有$|L|$的点缩为一点后得到的空间加以三角剖分后得到的单纯复合形。

借助于相对同调，1934 年切赫和亚历山大洛夫独立地引入局部同调，同年，赛弗特和特莱尔费尔在他们的书中给出独立的定义。

(3) 万有系数定理

以前同调群的定义都默认是以整数 Z 为系数的链群引出的同调群，不过在实用过程中用一般的系数更为方便。因此，具有 Z_2，Z_p，Q 的系数十分常见。早在 1908 年梯采就用过

模 2 同调，其实就是以 Z_2 为系数的同调群，不过当时没有同调群的概念，只不过是模 2 贝蒂数和模 2 挠系数，这些已经包含了不少信息。1913 年维布仑和亚历山大更明确地使用。1922 年维布仑证明了模 2 同调的拓扑不变性。1926 年亚历山大对于具有 Z_n 系数的单纯上同调给出精确的上同调，1928 年莱夫谢兹引入有理系数同调。1934 年庞特里亚金引入任意系数同调，但是只有当群和上同调正式引入之后，一般系数同调及上同调才显示出其间深入关系及应用。实际上一般系数群 G 的同调及上同调由整系数同调及上同调决定，也就是万有系数定理：

$$H_r(K,L;G)\cong H_r(K,L)\otimes G+\mathrm{Tor}(H_{r-1}(K,L);G);$$

$$H^r(K,L;G)\cong \mathrm{Hom}(H_r(K,L);G)+\mathrm{Ext}(H_{r-1}(K,L);G)。$$

(4) 对偶定理

数学中的对偶定理很多，特别是射影几何学中点与线的对偶引人注目。在拓扑学中，庞加莱 1895 年在他的大论文中，首先提出以他的名字命名的对偶定理。

庞加莱对偶定理 任何连通、定向、闭 n 维流形 M，

$$b_p=b_{n-p},\qquad 1\leqslant p\leqslant n-1。$$

庞加莱在论文中说，有些数学家已经知道并且使用过这个公式，但是他没有提到他们的名字。不过贝蒂在 1871 年对三维流形提到过这个结果，而且除了特殊情形之外，庞加莱的证明也不太可靠。他还引入约化贝蒂数和相应的对偶定理，对于挠系数有

$$t_r=t_{n-r-1}。$$

1922 年亚历山大引入另一个形式对偶定理，对于 S^n 中维数$\leqslant n-1$ 的紧光滑流形 Y，他定义开集 $S^n\setminus Y$ 的“同调

群”，并证明，对于 $p \leqslant n-2$，有：

亚历山大对偶定理

$$H_p(Y;Z_2) \cong H_{n-p-1}(S_n \setminus Y;Z_2)。$$

后来推广到 X 是 n 维定向紧流形，Y 是闭子流形情形

$$H^p(Y;Z) \cong H_{n-p}(X, X \setminus Y;Z)。$$

这对纽结理论很重要。由于原始的莱夫谢兹不动点理论不能包括布劳威尔不动点定理。为了把不动点定理推广到有边界流形（相对流形），莱夫谢兹引入了相对同调解，并把庞加莱对偶定理推广到相对情形，得出莱夫谢兹对偶定理，这不仅是一种推广，而且把以前两个互不相关的庞加莱对偶定理和亚历山大对偶定理统一在一起。

莱夫谢兹对偶定理 对于定向紧 n 维流形 M 和任意系数群奇异上同调群和奇异同调群之间有

$$H^i(M) \cong H_{n-i}(M, \partial M),$$

$$H^i(M, \partial M) \cong H_{n-i}(M)。$$

4.2 奇异同调论

奇异同调论现在是标准的同调论，它指向同调及上同调的公理化，从而结束多种同调群并存的局面。

同调群的定义开始于单形同调群，它必须对单纯复合形来定义。这样，对于一般空间来说，必须选定一个特殊的三角剖分，而且我们还必须确定它是一个反映空间本身的不变量，而和所选的剖分没有关系。另外，在计算过程中，我们都要设计一个好的剖分，使我们能够计算它。在一般情况下这是非常麻烦的。

为了避免这一缺点，许多数学家都考虑到使用奇异同调的概念，它完全避免了三角剖分的麻烦。

奇异单形的定义：空间 X 的奇异 q 维单形是一个连续映射

$$T:\triangle^q \longrightarrow X,$$

其中 $X\subset R^n$，$\triangle^q$ 是标准 q 维单形，它由 R^{q+1} 中 $q+1$ 个点构成，实际上，它是由 R^{q+1} 中 $q+1$ 个单位向量张成的，即

$$\triangle^q = e_0 e_1 \cdots e_q,$$

$$e_0 = (1, 0, \cdots, 0),$$

$$e_1 = (0, 1, \cdots, 0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_q = (0, 0, \cdots, 1)。$$

令 S_q 为 X 中所有奇异 q 单形的集合，定义 X 的奇异 q 链群 $C_q(X)$ 如下：

$$C_q(X) = \{f: S_q \longrightarrow Z \mid \text{对于除了有限多个 } T\in S_q \text{ 外，所有的 } T\in S_q,\ f(T) = 0\},$$

群的运算是显然的，即对于

$$f, g \in C_q^s(X),\ T\in S_q,$$

$$(f+g)(T) = f(T) + g(T),$$

由此不难看出，$C_q^s(X)$ 实际上是所有有限线性组合

$$n_1 T_1 + n_2 T_2 + \cdots + n_k T_k$$

所构成的群，其中 $n_i \in Z$，T_i 是 X 的奇异单形。对于每一个奇异单形 $T:\triangle^q \longrightarrow X$ 都可以定义 T 的第 i 个面

$$\sigma^i T: \triangle^{q-1} \longrightarrow X,$$

$$(t_0, t_1, \cdots, t_{q-1}) \longmapsto T(t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{q-1})。$$

另外还可以定义边缘同态

$$\partial_q^s: C_q^s(X) \longrightarrow C_{q-1}^s(X),$$

$$\partial_q^s(T) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^i (\sigma^i T) \in C_{q-1}^s(X)。$$

不难证明

$$\partial_{q-1}\cdot\partial_q=0。$$

因此，可定义奇异同调群

$$H_q(X)=\frac{Ker\partial_q}{Im\partial_{q+1}},$$

而且，对于连续映射

$$f:X\longrightarrow Y,$$

可定义同态

$$f_q^*:C_q(X)\longrightarrow C_q(Y),$$

使

$$f_q^*(T)=foT。$$

由于

$$\partial_q\cdot f_q^*=f_{q-1}^*\cdot\partial_q,$$

f 可诱导出

$$f_q^*:H_q^s(X)\longrightarrow H_q^s(Y)。$$

可以证明，对于 f 可以定义单形同调、切赫同调及其变种，例如菲陶里斯同调以及奇异同调的拓扑空间，其各种同调都同构。这样，奇异同调成为同调论的代表。

奇异同调的思想很早就有，1907 年德恩与希格尔（Heegaard, Poul, 1871—1948）在德国的《数学百科全书》中撰写"位置分析"的条目时，已经用到这种方法，不过当时对皮亚诺曲线所造成的麻烦还没有什么办法，因此还是维持剖分成单纯复合形的办法。

亚历山大在 1915 年证明贝蒂数和挠系数是拓扑不变量时，实际上证明它们是组合不变量也用到奇异单形的观念。奇异同调论的基本概念是 X 上的奇异链的概念，它包括一个复合形

K，一个映射 $K \longrightarrow X$ 和一个 K 上通常链，这个思想在维布仑 1922 年出版的拓扑学第一本专著《位置分析》中已有表述，胡列维奇（Hurewicz，Witold，1904—1956）、道克尔在 1948 年曾加以发展，但是他们的同调群不能用链复形得出，因为这些链不形成群。

首先定义奇异链群的是莱夫谢兹，不过他在 1933 年论文中只考虑定向单形到 X 中的映射，因此，他定义的是奇异定向单形。在考虑链群时，需要在这两个定向中选一个定向。后来切赫指出，有时这两个定向可能重合，从而无法形成自由阿贝尔群。1944 年爱仑堡（Eilenberg，Samuel，1913—1998）用有序单形代替定向单形，最后完整而准确地定义奇异同调群。

4.3 同调论公理

1945 年在爱仑堡提出奇异同调论一年之后，他和斯廷洛德提出一套公理系统。

一个同调论 H 是定义在某个可允许范畴之上的，由三个"函数"构成：

1. 对于拓扑空间对(X,A)，$A\subset X$，以每个整数 $q\in Z$，都对应一个阿贝尔群 $H_q(X,A)$，称为 q 维相对阿贝尔群。

2. 对于每个映射

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

和每个整数 q，都对应一个同态

$$f_q^*:H_q(X,A)\longrightarrow H_q(Y,B),$$

称为由 f 诱导的同态。

3. 对于拓扑空间对(X,A)和每个整数 q，对应一个同态

$$\partial(q,X,A):H_q(X,A)\longrightarrow H_{q-1}(A),$$

称为边缘算子。

其后 $\partial(q,X,A)$和 f_q^* 可简化为∂ 和 f^*。这三个函数满足如下 7 条公理:

(1) 如 f = 恒同映射,则 f^* = 恒同映射。

(2) $(gf)^* = g^* f^*$。

(3) $\partial f^* = (f|A)^* \partial$。

(4) (正合公理) 若(X,A)可允许的,

$$i:A\longrightarrow X,$$

$$j:X\longrightarrow (X,A)$$

为自然包含映射,则下列群和同态序列

$$H_q(A)\xrightarrow{i^*}H_q(X)\xrightarrow{j^*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(A)\xrightarrow{i^*}\cdots$$

是正合的,它称为(X,A)的同调序列。

(5) (同伦公理) 若两个映射

$$f_0,f_1:(X,A)\longrightarrow (Y,B)$$

同伦,则对每个 q,同态

$$f_0{}^*,f_1{}^*:H_q(X,A)\longrightarrow H_q(Y,B)$$

相重合。

(6) (切除公理) 若 U 是X 的开集,其闭包$\overline{U}$ 包含在A 的内部,则包含映射

$$i:(X-U,A-U)\longrightarrow (X,A)$$

对每个 q,诱导映射

$$i^*:H_q(X-U,A-U)\longrightarrow H_q(X,A)$$

是同构。

(7) (维数公理) 若 P 为一点构成的空间,则对所有$q\neq 0$,

$H_q(P)=0$。

由这些公理可知，如(X, A)和(Y, B)同胚，即存在映射

$$f:(X, A)\longrightarrow(Y, B),$$

$$g:(Y, B)\longrightarrow(X, A),$$

使得 fg 和 gf 是恒同映射，则 f^* 诱导每 q 维同伦群的同构。

4.4 上同调理论

比起同调来，上同调包含更多的信息，而且构成纤维丛、示性类、配边理论、广义上同调等的基础。

具体构造时，同调的概念显然更为自然，而且具有几何图形的背景。相应的上同调的概念则更为抽象。不过，形式的定义从庞加莱定义同调时就已经引进。实际上，庞加莱对于紧 n 维组合流形 M 的一个三角剖分 T，已经定义一个对偶复合形 T^*，从而得出向量空间 $H_p(M, Q)$的基的一个对偶基，它们属于 $H_{n-p}(M, Q)$。

不过对于任意有限欧氏单纯复合形，这定义不再适用。莱夫谢兹使用庞加莱的造法，证明他的组合流形的不动点定理。1928 年霍普夫成功地把这个定理推广到一般复合形上。为了解释这个惊人的结果，莱夫谢兹在他 1930 年出版的《拓扑学》一书中，对任意有限欧氏单纯复合形，引入 T^* 的失掉的闭链一个代用品，他称为伪闭链。这可看成上同调中上闭链的前身。但关键的上边缘算子并没有定义，因此还不能算是上同调真正的意义。

莱夫谢兹的结果影响了另外两位美国数学家：惠特尼(Whitney, Hassler, 1907—1989）和亚历山大，他们分别在 1934 年和 1935 年定义了上同调。亚历山大的定义最为简单，

他把 q 上链定义为由空间中任意有序$q+1$点的集合到系数群的函数。这样，可以自然定义上边缘算子和上同调。

亚历山大的上同调后来他自己修正。1947 年，他引进分格（*grating*）概念。沃利斯（Wallace, Andrew Hugh, 1926—）也进行修正。1948 年斯潘尼尔（Spanier, Edwin Henry, 1921—1995）证明这样上同调理论对于紧空间服从爱仑堡—斯廷洛德公理，并且与切赫理论一致。虽然亚历山大的定义简单，但是没有相应的同调群和对偶关系。这往往称为亚历山大—斯潘尼尔上同调群。同时亚历山大还用德·拉姆的定理来定义上边缘算子，得出具有对偶性质的上同调群。苏联数学家柯尔莫哥洛夫也得出同样的定义。他们都定义了在同调情形所没有的上积，从而使上同调不仅是群而且是交换环。

有了同调群，不难定义上同调。实际上，同调函子是协变的，上同调函子则是反变的。也就是对于可允许空间对(X, A)和(Y,B)，我们对任何 q 可定义$H^q(X,A)$和 $H^q(Y,B)$且对可允许映射

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

我们能诱导同态

$$f^*:H^q(Y,B)\longrightarrow H^q(X,A)。$$

另外，上边缘算子是升 1 维而不是降 1 维

$$\delta:H^{q-1}(A)\longrightarrow H^q(X,A),$$

且 $\delta\cdot\delta=0$。这样不难证明，它们也满足对应的 7 条公理，从而可以证明其存在性和唯一性。

对于上同调，如果仅限于上同调群，那么它与同调的差别不大。但是，它比同调的用处要大得多。其原因在于，它上面有丰富的附加结构，这些结构大致有三大类：

——乘积与上同调环结构；

——上同调运算；

——霍普夫代数结构。

这些都是比较专门的内容，下面只简单介绍一下。

1. 乘积与环结构

同调与上同调的乘积有多种，最主要的是上积，也称杯积，用$\smile$表示，它是同态

$$\smile: H^p(X, A_1; G_1) \otimes H^q(X, A_2; G_2)$$
$$\longrightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_3)。$$

这个同态把 $W_1 \otimes W_2$ 映到 $W_1 \cup W_2$。

有了每个维数的上同调群以及上积元后，当 $G_1 = G_2 = G_3$ = 有么元环 R，这样上同调群

$$H^*(X, A; R) = \sum_n H^n(X, A; R)$$

是 R 上分次模，它以上积为乘法而成为 R 上的反交换分次代数，称为(X, A)的以 R 为系数的上同调环或上同调代数。

2. 上同调的环结构

上同调的环结构的第一个重要应用是证明 $\pi_{4n-1}(S^{2n})$是无限群。设 $\alpha \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$可用映射

$$f: S^{4n-1} \longrightarrow S^{2n}$$

来表示，用 f 可造一个CW 复形

$$X_\alpha = S^{2n} \smile_f e^{4n}。$$

它是通过 f 把 $4n$ 维胞腔沿着边界 S^{4n-1}的象粘在 S^{2n} 上。这样 X_α 一共有 3 个胞腔：0 维，$2n$ 维，$4n$ 维，由于 $\partial \equiv 0$，

$$H^*(X_\alpha; Z) = Z \oplus Z \oplus Z,$$

设 a, b 分别是$H^{2n}(X_\alpha; Z)$和 $H^{4n}(X_\alpha; Z)$的生成元，则

$$a \smile a = hb,$$

h 只依赖于 α 的同伦类，称为 α 的霍普夫不变量，记作 $h(\alpha)$。

霍普夫不变量具有可加性，即

$$h(\alpha+\beta)=h(\alpha)+h(\beta)。$$

由此，$\alpha \longmapsto h(\alpha)$ 引出 $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \longrightarrow Z$ 的一个同态，而且，这是非平凡的同态，即存在 α，使 $h(\alpha) \neq 0$。这样，$\pi_{4n-1}(S^{2n})$ 都是无限群。

实际上，

$$\pi_{4n-1}(S^{2n}) = Z \oplus \text{有限群}。$$

例如

$$\pi_3(S^2)=Z,$$

$$\pi_7(S^4)=Z\oplus Z_{12},$$

$$\pi_{11}(S^6)=Z,$$

$$\pi_{15}(S^8)=Z\oplus Z_{120}。$$

一个重要的问题是：是否每个整数都是霍普夫不变量？答案是否定的。但是，对于任意偶数 $2m(m\in Z)$，都存在映射

$$f: S^{4n-1} \longrightarrow S^{2n},$$

其霍普夫不变量 $h(f)=2m$，而且这对任何 n 均成立。对于奇数，则情形大不一样。1956 年亚当斯（Adams, John Frank, 1930—1989）证明，只有在 $n=1,3,7$ 时才存在映射 f，使 $h(f)=1$。证明这个大定理的重要工具是亚当斯谱序列。

3. 上同调运算

除了上积之外，对于连通拓扑空间 X，有时还可以定义不同维数和不同系数群 G, G' 的上同调群之间的映射

$$\varphi: H^i(X;G) \longrightarrow H^j(X;G'),$$

它与爱仑堡—麦克莱恩空间 $K(G,i)$ 有关。爱仑堡—麦克莱恩

空间 $K(\pi, n)$是拓扑学中一个重要空间，它满足

$$\pi_n(K(\pi, n)) = \pi,$$

$$\pi_i(K(\pi, n)) = 0, \quad i \neq n。$$

它的重要性在于连续映射

$$f: X \longrightarrow K(\pi, n)$$

的同伦类$[f]$与 $H^n(X, \pi)$一一对应，即 $z \in H^n(X, \pi)$ 对应于 $H^n(\pi, n; \pi)$的基本类 u 的象$f^* u$，这里$H^n(\pi, n; \pi)$即 $H^n(K(\pi, n), \pi)$。有了这样的概念，则对应

$$z \in H^j(G, i; G'),$$

就可以定义上同调运算 $\varphi = \varphi_z$，

$$\varphi: H^i(X; G) \longrightarrow H^j(X; G'),$$

只要对于 $x = f^* u$ 取值为$\varphi(x) = f^* z$，这里 f 为映射

$$f: X \longrightarrow K(G, i)。$$

根据爱仑堡—麦克莱恩空间理论，所有的上同调运算，它们可以通过下面的基本上同调运算重复运用三种演算，由演算和、上积及合成得到：

(1) 由模同态 $G \longrightarrow G'$诱导出来的上同调运算

$$H^i(X; G) \longrightarrow H^i(X; G')。$$

(2) 由模的正合序列

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

诱导出的边缘同态

$$\beta \longrightarrow H^p(X; G') \longrightarrow H^p(X; G) \longrightarrow H^p(X; G'')$$

$$\xrightarrow{\beta} H^{p+1}(X; G') \longrightarrow 0。$$

(3) 斯廷洛德运算

①平方运算 Sq，

$$Sq = Sq^0 + Sq^1 + \cdots$$

$$Sq^i: H^l(X;Z_2) \longrightarrow H^{l+i}(X;Z_2)。$$

②约化幂运算 P_p^r(p 为奇素数，$r=0,1,2\cdots$)，

$$P_p^r: H^l(X;Z_p) \longrightarrow H^{l+2r(p-1)}(X;Z_p)。$$

(4)庞特里亚金运算

$\beta_{p\cdot h}$($p=2$ 或奇素数，$h=1,2,\cdots$)，对于所有偶数 $2l$，有

$$\beta_{p\cdot h}: H^l(X;Z_{p^h}) \longrightarrow H^{pl}(X;Z_{p^{h+1}}),$$

其中我们列举常用运算 Sq 的性质：

①$Sq^0 x = x$；

②$Sq^i x = x^2 = x \smile x$(当 $\dim x = i$)；

③$Sq^i x = 0$　(当 $\dim x < i$)；

④$Sq^i(x \smile y) = \sum_{j+k=i} Sq^j x \smile Sq^k y$；

⑤阿德姆公式

$$Sq^a Sq^b(x) = \sum_c \begin{pmatrix} b-c-1 \\ a-2c \end{pmatrix} Sq^{a+b-c} Sq^c(x),$$

其中 $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ 为模 2 二项系数，若 $k=0$ 或 $j>k$ 时，规定 $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = 0$。

这是阿德姆在 1952 年得出的。

上同调运算进一步发挥上同调的作用，最早是由庞特里亚金和斯廷洛德在 1947 年独立引进的，它们立即成为解决映射的同伦分类问题的工具，在解决同伦型问题，计算球面同伦群，研究霍普夫不变量，计算球面上切 r 标架场，构造微分流形的示性类等方面发挥重要作用。

(5) 霍普夫代数结构

把一类上同调运算，例如斯廷洛德平方运算（Sq^i），以合

成为乘法，就形成 Z_2 上的霍普夫代数。P^i 和包克斯坦（Bokshtein, Meer, 1913—）运算$\triangle_p$ 以合成为乘法也形成Z_p 上的霍普夫代数，它们都称为斯廷洛德代数。

霍普夫代数是代数拓扑学中常用的工具，它的结构稍稍复杂一些，大致是：

对于域 k 上的分次模

$$A = \sum A_n,$$

如果具有结合乘法并且以域 k 的么元为么元，同时还具有反乘法

$$\triangle : A \longrightarrow A \otimes_k A$$

使得对每个次数>0 的齐次元素 $z \in A$，满足下列关系

$$\triangle(z) = 1 \otimes z + z \otimes 1 + \sum_{i,j} x_i \otimes y_j,$$

其中 x_i、y_j 均为齐次元素，次数均>0，且 z 的次数 $\deg z = \deg x_i + \deg y_j$。

由斯廷洛德上同调运算生成的斯廷洛德代数还满足局部有限和连通的条件。局部有限是指每 A_n 均为k 上有限生成结合代数，连通是指 $A_0 \cong k$。斯廷洛德代数的结构已经定出，对广义上同调研究十分有用。

1986 年产生的量子群理论可以看成是霍普夫代数的发展。

4.5 不动点定理

不动点定理首先是荷兰数学家 L·E·J·布劳威尔提出的，他研究 n 维胞腔或 n 维球面到自身映射的不动点。布劳威尔早在 1909 年就研究二维球面 S^2 到自身的连续映射，他首先研究保持定向的双方连续映射并证明其中至少有一不动点即 $f(x)$

$=x$，但证明冗长。1910 年他又给出一个证明，是作为 S^2 上连续向量场上至少存在一个奇点的推论，这定理的证明也是极为复杂，一直到 1911 年他发展了映射度理论之后，一举证明一个普通结果：连续映射

$$f: S^n \longrightarrow S^n,$$

只要满足映射度 $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$，则 f 至少有一不动点。反过来讲，如 f 没有不动点，则

$$\deg(f) = (-1)^{n+1}。$$

不过由于当时大家对映射度不熟悉，对此不太注意。但是他的一个推论 I^n 到 I^n 的连续映射总有一个不动点引起广泛注意，这个定理开辟了以后不动点理论的先河，成为一个十分活跃又有很重要的应用价值的分支。其后美国拓扑学家亚历山大研究过二维流形的拓扑映射，接着，莱夫谢兹的工作就是对这些结果进行大规模的漂亮的推广，推广的重要一步是把代数的交截理论转换成拓扑的交截理论。一开始他在定向封闭流形上考虑，1923 年他已经得到可定向封闭流形上连续自映射的不动点定理：设 f 为定向封闭流形 X 到自身的连续映射，对每一维 n，f 诱导 X 的有理系数 R 的同调群 H_n（X）的自同态 f_n，由于这时 H_n（X）是 R 上的向量空间，如果 f_n 的秩有限，可以算出 f_n 的矩阵表示的迹 Tr（f_n）。定义莱夫谢兹数 $L(f)$ 为

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Tr(f_n)。$$

莱夫谢兹证明：$L(f)$ 是整数，且如 $L(f) \neq 0$，则 f 至少有一个不动点。

其后莱夫谢兹对他的不动点定理进行一系列推广，先是推

广到边界流形（1926），在霍普夫推广到 n 维复形的特殊情形（1928）之后，莱夫谢兹又在1930年推广到具有有限贝蒂数的有限维紧度量空间，在1933年对有限维复形给出简单而漂亮的证明，最后他推广到所谓广义流形及局部连通空间。

4.6 拓扑 K 理论

从历史的发展顺序看，K 理论在20世纪50年代中期出现，是在成熟的同调理论以及同调代数之后。可是，正如阿提雅所说："K 理论是线性代数中研究可加或阿贝尔性质（例如行列式）的部分。" K 理论的对象实际上是比较简单的，甚至可以说是最简单的同调理论。由于同调和上同调已经公理化，拓扑 K 理论是最早发现的一种广义上同调理论。由于有了成熟的上同调理论，拓扑 K 理论的发展往往可以仿照上同调理论发展相应的理论。例如上积理论、上同调运算理论以及相应的计算方法，而且非常代数化。

1956年，法国数学家格罗登迪克（Grothendieck，Alexandre，1928—）为了推广代数几何学的中心定理——黎曼—洛赫（Roch，Gustave，1839—1866）定理，引入两个 K 群：K^0 和 K_0，相应于通常的上同调群和同调群。

两个代数簇之间的映射 $F: X \longrightarrow Y$ 的黎曼—洛赫—格罗登迪克定理，当 Y 缩为一点时，就得出通常的黎曼—洛赫—希采布鲁赫（Hirzebruch，Friēdrich，1927—）定理。

格罗登迪克的结果在1957年德国的"工作会议"上报告，并由A·保莱尔（Borel，Armand，1923—）和塞尔整理于1958年发表。

不管是原来的黎曼—洛赫—希采布鲁赫定理，还是格罗登

迪克的推广，都得出代数簇的示性类的可除性条件。那么一个自然的问题是这些示性类条件对于更一般的近复流形甚至微分流形能否还满足？到1958年保莱尔和希采布鲁赫已经得出部分结果。但是阿提雅和希采布鲁赫从更一般的角度去考虑完全开辟一个新领域——拓扑 K 理论。

1958年阿提雅从三条路线引向 K 理论：

(1) 微分流形上的黎曼—洛赫定理；

(2) 鲍特（Bott，Raout，1923—）周期性定理；

(3) 詹姆斯（James，Ioan，1928—）关于钝头（*stunted*）射影空间的问题。

但是把这三条路线汇合而成 K 理论是一个极大的创造。主要原因在于它的出发点极为简单：他们考虑的是一个拓扑空间 X 上的向量空间丛，简称向量丛 $Vect$（x）。

由于向量空间是最简单的代数结构，空间中每一点结合一个向量空间实际上是最简单的构造，这样得出的向量丛要比以前的纤维丛简单得多，而且由线性空间之间的运算自然引出丛 E、F 等的各种运算：

(1) 线性空间的直和⟶丛的直和 $E \oplus F$；

(2) 线性空间的张量积⟶丛的张量积 $E \otimes F$；

(3) 线性空间的线性映射⟶Hom（E，F）；

(4) 线性空间的对偶空间⟶对偶丛 E^*；

(5) 线性空间的 i 次外幂⟶λ^i（E）。

上面丛的运算得出一些自然的同构：

(1) $E \oplus F \cong F \oplus E$；

(2) $E \otimes F \cong F \otimes E$；

(3) $E \otimes (F_1 \oplus F_2) \cong (E \otimes F_1) \oplus (E \otimes F_2)$；

(4) $Hom(E,F)\cong E^{*}\otimes F$;

(5) $\lambda^{k}(E\oplus F)\cong\bigoplus_{i+j=k}(\lambda^{i}(E)\otimes\lambda^{j}(F))$。

为了应用的方便，不妨考虑有限 CW 复合形或者微分流形 X 上的所有复向量丛。向量丛的等价类生成一个阿贝尔群 $F(X)$，它有一个由

$$\xi\oplus\eta-\xi-\eta$$

的等价类生成的子群 $Q(X)$。这样 K 群定义为商群

$$K(X)=F(X)/Q(X)。$$

对于张量积，它具有环结构，它类似于上同调，也就是对于映射

$$f:X\longrightarrow Y,$$

可得出

$$f^{*}:K(Y)\longrightarrow K(X)。$$

K 理论为拓扑学提供了许多新的拓扑不变量，也成为研究几何和拓扑学的一个重要而有力的工具。因此从 K 理论一开始，就解决一些大问题，最著名的是亚当斯在 1962 年完整解决球面上独立向量场问题。

5 同伦理论

同伦理论是代数拓扑学的重要组成部分。作为拓扑不变量的同伦不变量也远比同调不变量强，但是也更为难于计算及处理。现在同伦理论还遗留大量问题没有解决，但是同伦论的进步对拓扑学乃至整个数学都产生重大影响。

5.1 引言

许多人分不清同调（*homology*）和同伦（*homotopy*），从最原始的思想来说，它们之间差别相当大，同调是（拓扑）空间或流形的性质，而同伦是空间与空间之间映射的性质。抓住这一点，理解起来也许能比较容易分辨这两类性质。不过，1935年以后，一个空间或流形既有同调群，又有同伦群，它们都是刻画空间或流形的拓扑性质，流形与流形之间也有同伦等价的说法，这就把人搞糊涂了。不过，同伦的根子还是映射。从这个观点看，我们可以做一个粗糙的类比：同调研究的是函数的定义域（或值域），而同伦则是研究函数本身。这种类比虽不一定恰当，可是它还是有许多启发性。

首先是函数本身的研究比定义域的研究远为复杂。以单变元的实函数来讲，通常研究的一般函数都是定义在实数直线上的一个区间或整个数直线，它们的结构相对简单，但是，它们

上的函数（直观看就是各种各样的曲线）非常之多，也没有什么固定的顺序，比起区间来，复杂得无法比拟。

其次在函数研究过程中，为了简化复杂性，我们采取一些方法。从历史上看，我们有：

（1）先研究特殊函数，然后从特殊到一般。实际上，无论实变函数还是复变函数，一开始都研究比较简单、能够处理的特殊函数，它们通常都具有很好的性质。例如线性函数、多项式函数、三角函数等等。而讨论一般函数时，总是把它们同特殊函数联系起来。例如展开成幂级数、三角级数等等。这样，我们对于任意函数也有较为统一的处理方法。

（2）对于任意函数，我们研究它与典型函数的差距。这里典型函数如分段线性函数、多项式、三角多项式等等。这里面的首要问题是，连续函数能否被多项式来逼近，也就是它们与某个多项式相差很小。如果这能够证明，我们就可以通过典型函数的研究去认识更一般的函数。

（3）函数的变形与函数的等价类。对于许多性质相近的函数，我们不必逐一研究，而只需要把性质相近的函数归成一类，从中挑选一个代表，这样把这个代表研究透了，这类函数的性质也就清楚了。

（4）函数集合或函数空间的结构。对于结构数学来讲，把函数或函数的等价类集中在一起，构成函数集合，然后研究函数集合的结构，这样的研究就是泛函分析。

由此可以看出，即使是比较简单的定义域和值域，函数的问题已经很困难，那么当定义域变得较为复杂时，函数论当然就更加困难。例如多复变函数论，长期以来只是先集中研究它的定义域，如全纯域的刻画与典型域的分类，而其上的分析至

今进展不大。现在到了拓扑学，其定义域与值域都比较复杂，因此研究其间的映射当然就十分困难了。由于拓扑学本身很抽象，因此，拓扑学的函数论——映射的同伦理论当然就更加困难了。尤其是现在无论是映射的定义域还是值域，维数都很高，映射再没有直观的图象（像曲线那样一目了然），所有研究都要靠代数的工具，因此研究起来就难上加难了。即使研究也需要一些直觉，可是直觉常常不太可靠。从历史上讲，计算同伦群时，不少专家都犯过错误。因此，对于非专业的人士来讲，他们需要的是知道同伦论结果的意义和它的各种应用。

5.2 同伦论前史

现在公认正式的同伦论诞生于 1930 年到 1935 年，比同调论晚 30 年到 40 年。但是，同调论的对象——几何图形的拓扑性质，至少在拓扑学正式诞生的 1895 年之前 100 多年甚至更早就已经研究，而同伦论则要晚得多。数学中在真正涉及映射的同伦问题之前，应该说来源于黎曼关于黎曼面的研究。

黎曼面是 19 世纪中叶大数学家黎曼的创造。他为了形象地表现多值函数而创造出“黎曼面”。在初等数学中，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 等等函数，对于 x 的每一个值，都有一个 y 值，这样的函数就叫做单值函数。反过来，这些函数的反函数，$x=\sqrt{y}$，$x=\sqrt[3]{y}$，$x=\arcsin y$，$x=\arccos y$ 等，对于 y 的每一个值，x 就有不止一个值和它对应，而是几个甚至无穷多个。这种对于自变量的一个值有许多函数值同它对应的函数就是所谓多值函数。

实变量的实函数是把 x 轴的点映到 y 轴上的点，在初等数学里，研究的都是实变量的实函数，函数可以用图象表现出

来，上面的单值函数对于 x 轴的每一点作平行于 y 轴的直线只与函数图象交于一点，如 $y=x^2$ 这个抛物线。可是，多值函数不同，一个自变量值对应两个或两个以上的函数值，如 $y=\sqrt{x}$，在图象上显示就是一条平行于 y 轴的直线与图象交于两点或两点以上。这种多值函数在初等数学中就已经常常见到了，如圆周 $x^2+y^2=1$。不过，当函数定义域和值域都是实数时，我们可以很“直观”地通过函数图象来研究，也就是函数的定义域、值域和函数本身都能清楚地显示出来。可是，19世纪中叶，函数的研究由实数域扩展到复数域，也就是研究定义在复数平面上，取值也在复数平面上的复数函数。这时函数的定义域和值域都由一条直线（或其一部分）扩大为一个平面。这样一来，函数的直观图象就画不出来了，我们只能满足于显示定义域和值域。对于单值函数，这就是摆上两张平面，一张表示定义域，一张表示值域。当自变量在定义域中变化时，可以描画函数值变化的情况。问题是多值函数，当你用这种方法描画时，在定义域上画出一条线，在值域上就描画出两条或多条线，使人眼花缭乱。黎曼为了使多值函数表现得更直观些，他就把定义域那张平面变成多张，叠在一起，使得每一张上的点仍对应函数的一个值。比如 $y=\sqrt{x}$ 是一个二值函数，就用两张平面表示 x 的定义域，一张相当于对应 $y=+\sqrt{x}$ 的值，一张相当于对应 $y=-\sqrt{x}$ 的值。这两张也不是完全分离的，在原点（单值点）沿着实轴粘在一起。对于任意的多值函数都可以造出这样一个单值化的定义域，这就是黎曼面。研究多值函数，尤其是代数函数，也就是研究黎曼面上的函数论了。

换句话说，复变代数函数的研究归结为黎曼面（定义域）

到复平面单值函数或者单值映射的研究了。由于代数函数是非常好的函数，它局部解析，至少连续，除了一些特殊的点——支点之外。所以值域上每一点 W 的邻域也对应黎曼面上若干点——它的原象的邻域了。反过来，黎曼面好像是覆盖在复平面（球面）上的覆盖面，黎曼原来的直观概念就是如此。

从这里我们得出覆盖映射的概念：由弧连通的拓扑空间 $\widetilde{Y}$ 到拓扑空间 Y 的连续映射 P 称为覆盖映射，如果满足下列条件：

对于 Y 的每点 x，都可以选取其开邻域 $U(x)$，使得 $P^{-1}(x)$ 的每个连通分支都同胚地映到 $U(x)$ 上。

覆盖面的概念可以推广到一个黎曼面到另一个黎曼面的覆盖映射。如果 $\widetilde{Y}$ 到自身的同胚 S，满足 $P \cdot S = P$，则 S 称为覆盖变换。覆盖变换的全体构成群。而当 $\widetilde{Y}$ 是万有覆盖面时，这个覆盖变换群就是 Y 的基本群 π_1（Y）。黎曼虽然没有正式提出这些概念，但是的确得到与它有关的群，如单演（*monodromy*）群，这是最原始的同伦概念，它们在变形之下不变。

1895 年庞加莱正式定义基本群，这是第一个同伦群。庞加莱正如几位 19 世纪末的数学大师一样，对于群是情有独钟。可是当时还没有几何的群是拓扑或同伦不变量，甚至他也不能把他定义的贝蒂数及挠系数合成为同调群。但是基本群的定义的确显示出他对群的深刻理解以及基本群所反映的流形的拓扑性质。

不难看出，由 $I = [0, 1]$ 到拓扑空间 X 上的连续映射 f 在 X 上的象，在 X 上画出一条道路（*path*），当 $f(0) = f(1) = x_0$ 时，它就画出一条闭道路。现在的问题是定义两条道路 f, g 的

乘积，使得它们最终成群。庞加莱认识到，这只要使 f 的终点等于 g 的起点即可以办到。具体来讲，f 和 g 的乘积 $f\circ g$ 为

$$f\circ g(t)=\begin{cases}f(2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}$$

每条道路还可以有逆道路

$$\bar{f}(t)=f(1-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1。$$

这样，我们就可以定义许许多多道路。这样太多了，没有必要，我们在所有道路之间引进一个等价关系：如果 f,g 两条道路满足

$$f(0)=g(0),$$
$$f(1)=g(1),$$

而且 $f(t)$ 可连续地变形成 $g(t)$，即存在连续映射

$$F: I\times[0,1]\longrightarrow X,$$
$$F(0,S)=f(0)=g(0),$$
$$F(1,S)=f(1)=g(1),$$
$$F(t,0)=f(t),$$
$$F(t,1)=g(t)。$$

具有相同始点、终点的所有道路在这种等价关系下构成等价类，记作 $[f]$，定义 $[f]^{-1}=[\bar{f}]$，显然

$$[f\circ g]=[f]\circ[g]。$$

当考虑具有基点 $f(0)=f(1)=x_0$ 的闭道路的所有等价类构成一个群，称为 X 的基本群，记作 $\pi_1(X,X_0)$。如果 X 是弧连通的，则基本群与基点选择无关，即 $\pi_1(X,X_0)=\pi_1(x,x_1)$，简记作 $\pi_1(x)$。如 $\pi_1(x)$ 只有一个元素，则 x 称为单连通的，球体(胞腔)和球面 $S^n(n\geqslant 2)$ 都是单连通的。$\pi_1(x)$ 是 x 的最重要

的拓扑不变量之一。

5.3 映射度

映射度观念的原始形式应当说相当古老，它们来自代数(方程的)基本定理和初等微积分的中间值定理，这两方面都涉及连续性。高斯在1899年的博士论文中给出代数基本定理第一个证明。他已经用到这样一个事实：一个在区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$如果在c处取正值，即$f(c)>0$，在d处取负值，即$f(d)<0$(其中c,d属于$[a,b]$)，则在c,d之间一定存在某一个值e，使$f(e)=0$，f是多项式，那么如果出现这种情况则说明多项式f在c,d之间存在一实根。不过这个直观的事实在当时还不能算是有严格的证明，因此高斯第一个证明并不能算是严格的。高斯的上述事实推广为微积分的中间值定理。

微积分的中间值定理 若$f:[a,b]\longrightarrow R$是$[a,b]$上连续实函数，如果$y\in[f(a),f(b)]$，则存在一点$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=y$。

显然这个定理给$f(x)=y$是否有解提供了一个很好的判据。

高斯在他的代数基本定理的第四个证明发展了这个思想。他的关于实根的判据，后来为许多数学家所发展，其中包括法国数学家斯特姆和埃尔米特、英国数学家西尔维斯特(Sylvester, James, Joseph, 1814—1897)、德国数学家雅可比和意大利数学家布廖斯奇(Brioschi, Fransceco, 1824—1897)等等。但这条道路尚不能直接引导到后来拓扑度的理论。

引导到拓扑度的概念是把单变量函数

$$f:\ I^1\longrightarrow R^1$$

推广到高维，即

$$f: I^n \longrightarrow R^n。$$

不过这并不是多元函数，因此，没有 R 中的序关系就谈不上中间值，因此在考虑 $n>1$ 的情形时采取另外一种方式，为了简单起见，不妨把 I^n 换成实心球体 D^n，其边缘是（$n-1$）维球面 S^{n-1}。这样，1869 年，德国数学家克洛耐克引入克洛耐克示性数（或称克洛耐克指数或指标），实际上就是后来的局部次数。他当时定义时，受到柯西和高斯关于 $n=2$ 或 3 情形的影响，特别是 1833 年高斯引进二个曲线的环连数，因为高斯的环连数与克洛耐克的示性数都是整数，而它们都是通过积分来定义的。

现在，我们可以通过

$$\varphi: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

的布劳威尔度(见后)来定义局部度，设

$$f: S^{n-1} \longrightarrow R^n, n \geqslant 1$$

是连续映射，$y \in R^n \setminus f(S^{n-1})$，则 f 在 y 的局部度

$$\deg(f;y) = \deg\varphi,$$

其中

$$\varphi: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1},$$

$$\varphi(x) = \frac{(f(x)-y)}{|f(x)-y|},$$

$n=2$ 时，$\deg(f;y)$有时称为 f 绕 y 的环绕数，因为它表示闭道路 $f(s^1)$围绕 y 绕的圈数。实际上，这给局部度一个比较直观的理解。

克洛耐克示性数只是对连续可微定义的，当时对拓扑还没有什么概念，但是已经认识到它的一个重要性质，即在映射变

形之下不变。而且由它可以得出广义中间值定理。

广义中间值定理 设

$$f: D^n \longrightarrow R^n$$

为连续映射，假设 $y \in R^n \setminus f(S^{n-1})$，如果

$$\deg(f | S^{n-1}; y) \neq 0,$$

则方程

$$f(x) = y$$

在 D^n 的内部 $\mathrm{Int}D^n$ 中存在一个解。

19 世纪 80 年代，德国数学家代克和法国大数学家庞加莱都应用克洛耐克示性数研究具体数学问题，特别是 1883 年庞加莱用于非线性常微分方程定性理论，得出后来所谓米兰达（Miranda，Carlo，1912—1982）定理。1886 年庞加莱和 1904 年波勒（Bohl，P．1865—1921）独立证明庞加莱—波勒定理。

庞加莱—波勒定理 设

$$h_t: S^{n-1} \longrightarrow R^n$$

为映射 $f = h_0$ 和 $g = h_1: S^{n-1} \longrightarrow R^n$ 的一个同伦，设 y 不属于任何 $h_t(S^{n-1})$，$t \in [0,1]$，则

$$\deg(f; y) = \deg(g; y)。$$

庞加莱和波勒以及毕卡（1893）和阿达马（1910）都认识到克洛耐克示性数的拓扑意义以及应用前景。他们也都把它推广到连续映射的情形。其后的发展正是沿着拓扑理论以及应用（重点是微分方程）两条途径飞速前进的。这里着重谈拓扑方面的。

拓扑度理论的正式建立应该说是从布劳威尔 1911 年论文开始的。这篇论文的意义在于：

（1）它由局部度真正过渡到整体度理论。

（2）它正式启动球面 S^n 到 S^n 的映射同伦类理论，而这是后来同伦论的核心同伦群的原型。

（3）它推广到同维可定向闭流形之间的映射，而且完全通过拓扑的方式（同调）定义出来，使得拓扑度理论正式成为拓扑学的一部分。

映射度 两个维数相等的可定向紧连通流形之间的连续映射

$$f:(M,\partial M)\longrightarrow(N,\partial N)$$

的映射度定义为整数 $\deg f$，它满足：对于任何

$$a\in H_n(N,\partial N)$$

有

$$f^*(a)=\deg f\cdot a$$

成立，其中 f^* 为 f 的诱导映射。

对于不可定向流形，则系数取自 Z_2。

映射度有许多重要的性质：

(1)映射度是同伦不变量，即如果两映射

$$f,g:(M,\partial M)\longrightarrow(N,\partial N)$$

同伦，则 $\deg f=\deg g$。

(2)合成映射 $f\cdot g$

$$(X,\partial X)\xrightarrow{f}(Y,\partial Y)\xrightarrow{g}(Z,\partial Z)$$

的映射度 $\deg(f\cdot g)=\deg f\cdot\deg g$。

（3）恒等映射 1 的映射度为 1。

（4）若 f 为同伦等价，则 $\deg f=1$。

虽然映射度是同伦不变的，可是我们还没有定义什么是同伦。简而言之，同伦是映射之间的一种等价关系。由拓扑空间

X 到拓扑空间 Y 的两个连续映射

$$f,\ g:\ X \longrightarrow Y$$

称为同伦，如果 f 可以连续地变形成 g，则存在连续映射族（称为同伦）

$$h_t:\ X \longrightarrow Y,\ t \in [0,\ 1],$$

使得

$$h_0 = f,\ h_1 = g。$$

换言之，存在连续映射

$$H:\ X \times [0,\ 1] \longrightarrow Y$$

使得

$$H_t:\ X \times t \longrightarrow Y$$

满足 $H_0 = f$，$H_1 = g$。

映射的同伦关系记作 $f \simeq g$，是一种等价关系，f 的等价类记作 $[f]$，由 X 到 Y 的所有连续映射的同伦类集合记作 $[X,\ Y]$，同伦不变量是关于同伦不变的量，对同伦等价的映射，它们都取相同的值。例如，布劳威尔的映射度是同伦不变量。同伦论的基本问题是：

决定给定拓扑空间 X，Y 之间连续映射的同伦类。也就是在同伦的层面上分类所有的连续映射。

正如其它拓扑分类问题一样，我们首先要寻找尽可能多的同伦不变量，在某些简单的情形下，我们的确可以找到它们的全组不变量，因而完成了同伦分类问题。例如，

$$f \simeq g: S^n \longrightarrow S^n \text{ 当且仅当 } \deg f = \deg g。$$

因此，对于球面到同维球面的映射的同伦分类完全由映射度一个同伦不变量决定，但是分类问题还没完，也就是哪些整数可以作为 S^n 到 S^n 上的映射的映射度？这个问题也是布劳威尔解

决的。他证明映射

$$[S^n, S^n] \longrightarrow Z$$

是满映射，即每个整数都是某类映射的映射度。

由于布劳威尔这个结果，同伦论的研究重点转向球面的映射类，它们有两类：

(1) $[S^m, S^n]$；

(2) $[S^m, M^n]$，M^n 为任意空间。

前一类是球面同伦群，特别是稳定同伦群的决定问题，后一类是空间或流形的同伦群的计算问题。遗憾的是，即使这些看来相对简单的问题，至今也远未解决。但是，即使它们取得了点滴进步，对于拓扑学乃至数学其他领域都会给予很大的推动。1931 年同伦论正式诞生，它正是因为试图取得这些问题的进步而开始拓扑学的新篇章。

5.4 同伦群

1915 年亚历山大证明“同调群”（贝蒂数及挠系数）的拓扑不变性时，实际上证明了一个更强的结果，也就是不仅对于同胚的空间 X，Y，它们的同调群同构，而且对于具有相同的同伦型的空间，它们的同调群也同构。这样看，X，Y 具有相同同伦型的条件要比同胚条件弱，也就是

X，Y 同胚$\Rightarrow X$，Y 具有相同同伦型。

但反过来，X，Y 具有相同同伦型，X，Y 未必同胚。为了清楚起见，我们比较一下这两个概念的定义：

两个空间 X，Y 称为同胚，如果存在连续映射

$$f: X \longrightarrow Y \text{ 和 } g: Y \longrightarrow X,$$

使得合成映射

$$gf = 1_X, \quad fg = 1_Y,$$

其中，1_X 和 1_Y 分别表示 $X \longrightarrow X$ 和 $Y \longrightarrow Y$ 的恒同映射。两空间 X，Y 同伦等价，也就是具有相同的同伦型，则只要求存在两个映射

$$f: X \longrightarrow Y \text{ 和 } g: Y \longrightarrow X,$$

使得合成映射同伦于恒同映射就可以了，也就是

$$gf \simeq 1_X, \quad fg \simeq 1_Y。$$

一个映射本身是恒同映射 1_X 当然同伦于映射 1_X，反过来一个映射只是同伦于 1_X 未必就是 1_X。因此，同伦映射远远弱于同胚。

由于我们很清楚映射的同伦等价，因此，由映射的同伦等价不难变成空间的同伦等价，这样使得同伦等价变为空间的一种拓扑不变性质，这种不变性质或拓扑不变量称为同伦不变量。利用同伦不变量，我们可以根据它们把空间分类为不同的同伦型，而具有相同同伦型的空间具有相同的同伦不变性质和相同的同伦不变量。这种对空间的分类我们称为同伦分类。这样，我们有三种空间的分类，也有三套不变量：

同胚类(拓扑等价类)	同胚不变量(拓扑不变量)
$\curlyvee$	$\Uparrow$
同伦类	同伦不变量
$\curlyvee$	$\Uparrow$
同调类	同调不变量

其中 $\curlyvee$ 表示同胚类比同伦类更细，也就是两个空间可以具有相同的同伦型即属于相同的同伦类，但是未必同胚。同样，同一同调类的空间也未必同伦等价。这是因为同调不变量一定是同伦不变量，反之不成立。同样，同伦不变量一定是拓扑不变

量，但反之也不对，这就是右边⇑所表示的。

这样，我们把同伦由研究映射转向研究空间，因此，要特别注意同调及同伦的差别，特别是同伦不变量。如同伦群一般要比同调不变量，例如同调群更强。因此，对于空间来讲，同伦论的主要目的也就是找到和计算它的同伦不变量，而首当其冲的是同伦群。

第一个同伦群是基本群，它是由庞加莱在 1895 年引进的，与其它的拓扑不变量不同，基本群不一定是阿贝尔群，也就是它是非交换群，而且往往是难以处理的无限群。因此，直到 100 年后的今天，我们还不能说对基本群有很多了解，因此通常我们并不把它列入同伦的范畴中来研究。

但是，基本群的定义却启发捷克数学家切赫定义高阶的同伦群。一个空间 X 的基本群定义是在空间中选定一基点 a，同时在圆 S^1 上选定一基点 e，研究所有保持基点映射（即把 e 映到 a）

$$f:(S^1,e)\longrightarrow(X,a)$$

的同伦类。

1932 年在苏黎世召开的国际数学家大会上，切赫做了一个简单的推广，把 S^1 换成球面 S^n，他定义所有保持基点的映射

$$f:(S^n,e)\longrightarrow(X,a),$$

发现它们的同伦类也具有群的性质，这些当然是基本群的自然延续，被称为高阶同伦群。在切赫的报告之后，苏联数学家亚历山大洛夫和德国数学家霍普夫等很快发现：当 $n\geqslant2$ 时，这些同伦群 π_n（X）都是阿贝尔群。对于这些交换群，显然就觉得它们没有基本群那种非交换群所包含的信息多，而且更进一步还产生一种错觉，以为 π_n（X）不会比当时熟知的交换

群——同调群 H_n（X）提供更多的信息。虽然霍普夫本人已经得出

$$\pi_3\ (S^2)\ \cong Z,$$

而

$$H_3\ (S^2)\ =0。$$

π_3 给 S^2 带来的信息远远超出 S^2 的同调群所可能提供的。这种错误的认识，扼杀了切赫的研究，他被劝说在会议录发表时撤回报告的全文，而只发表了一个简短的摘要。切赫再没有去研究同伦论，这是历史的不幸。

这样同伦论再次回到映射类的观点，不过仍没有逃脱空间同伦等价的观点而最终促使同伦群正式产生。

霍普夫继研究 S^3 到 S^2 的映射之后，1933 年他研究 n 维组合流形 M 到 S^n 的映射的"同伦类"，他发现存在同伦等价于存在扩张问题。

波兰数学家波尔苏克（Borsuk，Karol，1905—1982）1931 年引入对同伦论重要的收缩（*retraction*）和收缩核（*retract*）的概念。

一空间 X 到其子空间 A 上的收缩，就是连续映射

$$r:\ X\longrightarrow A,$$

满足

$$r(X)=A,$$

且对于 $a\in A, r(a)=a$。

如果对 X 的一个子空间 A，存在收缩映射 r，则称 A 为 X 的收缩核。收缩核最主要的性质在于：任何连续映射

$$f:\ A\longrightarrow Y$$

都可以扩张为

$$g: X \longrightarrow Y,$$

即

$$g = f \circ r。$$

但是收缩核的概念有很大缺点，就是在考虑 A 时，必须考虑整个空间 X，包括那些离开 A 很远的点，这样往往就得不到收缩映射。为此，波尔苏克在 1932 年又引入几个新概念：

(1) 绝对收缩核（AR），这是收缩核概念的限制。A 称为 X 的绝对收缩核，如果对于任何空间 X 和任何 A 到 X 的子空间 j（A）上的同胚 j，j（A）是 X 的收缩核。

(2) 邻域收缩核（NR），这是收缩核概念的推广，即 A 是 A 在 X 中某个邻域 U（A）的收缩核。例如 S^{n-1} 不是 R^n 的收缩核，但却是 R^n 的邻域收缩核。

(3) 绝对邻域收缩核（ANR），这是最有用的介乎 AR 和 NR 之间的概念。一个可分度量空间 Y 是 ANR，如果对于任何 Y 到任意空间 X 的子空间 Z 上的同胚，Z 是 X 的邻域收缩核。

波尔苏克对紧 ANR 一个刻画：它同胚于希尔伯特立方体的邻域收缩核。

(4) 形变收缩核。A 称为 X 的形变收缩核，如果收缩映射 $r: A \longrightarrow X$ 同伦于 X 的恒同映射。

如果 X 中一点 X_0 是 X 的形变收缩核时，称 X 是可缩的（*contractible*）。

大约同时，美国数学家莱夫谢兹引入有关的局部可缩（LC）及弱局部可缩（LC^p）等概念。这些概念对同伦论的意义在于，它们与同伦论的基本问题——扩张问题有密切关系。例如，若 X 和 A 均为 ANR，则（X，A）对于任何空间均有

同伦扩张性质。这就是说，对于任何连续映射

$$f_0: X \longrightarrow Y,$$

以及两映射

$$g_0 = f_0 | A$$

和

$$g_1: A \longrightarrow Y$$

之间的同伦

$$F: X \times [0,1] \longrightarrow Y,$$

它是 f_0 和扩张 g_1 的映射

$$f_1: X \longrightarrow Y$$

之间的同伦。在这种情况下，自然的内射 $A \longrightarrow X$ 称为上纤维化（*Cofibration*）。

上纤维化一个重要性质是：若 A 是可缩的，则点缩映射

$$P: X \longrightarrow X/A$$

是同伦等价。因此，上纤维化提供了造同伦等价的许多方法，其中包括：

①映射柱；

②映射锥；

③相对 CW 复合形。

1934 年，由于布劳威尔的推荐，波兰数学家胡列维奇最终把同伦群再次推向前台。他定义的同伦群与切赫的完全一样，但是，他指出他的同伦群与同调群的不同之处，并且得出同伦群与同调群的关系。这在历史上无疑使同伦群作为新事物的地位完全确定下来。

胡列维奇的论文以简报的形式分成 4 篇在 1935 年到 1936 年发表在荷兰王家科学院院报上，4 篇的题目如下：

（1）高维同伦群

（2）同伦群与同调群

（3）映射类与同调型

（4）无球状面空间

在第一篇简报中，他定义高次同伦群，但他不是直接考虑〔S^n，X〕，而是继续庞加莱，直接考虑环路空间 Ω（X，x_0），也就是由所有保持基点映射 f：$S^1 \longrightarrow X$ 的集合，赋予紧开拓扑之后而得的空间。在这个空间中，指定常数环路

$$X_1: S^1 \longrightarrow \{X_0\}$$

为基点，又可以考虑环路空间的基本群

$$\pi_1(\Omega(X, x_0), x_1)。$$

把这个过程递归下去，依次得到高次环路空间

$$\Omega^p(X, x_0) = \Omega(\Omega^{p-1}(X, x_0), X_{p-1}),$$

从而他定义 p 次同伦群

$$\pi_p(X, x_0) = \pi_1(\Omega^{p-1}(X, x_0), X_{p-1})。$$

不难证明，这是群，而且对于 $n \geqslant 2$，$\pi_n(X, x_0)$是交换群。这样他把同伦论从映射类正式移到空间上。后来他还定义相对同伦群。这样，他定义了两个具有基点空间的同伦等价以及同伦型。他证明空间的同调型只依赖空间的同伦型，且映射同伦类〔X，Y〕只依赖于 X 和 Y 的同伦型，特别是 X 的同伦群只依赖于 X 的同伦型。

胡列维奇的贡献不仅在于定义高次同伦群，而且在于得到与当时知道的仅有的拓扑不变量——同调群的关系。

在第二篇简报中，他证明了下面的定理：

胡列维奇同构定理 若 X 是（$n-1$）连通的，即

$$\pi_j(x) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1),$$

则

$$\pi_n(X, x_0) \cong H_n(X; Z)。$$

在第三篇简报中，他推广1933年霍普夫得到的霍普夫分类定理：

设 X 为 n 维有限单纯复合形，则两个映射

$$f, g: X \longrightarrow S^n$$

同伦，当且仅当它们定义相同的同态

$$f_*, g_*: H_n(X; Z) \longrightarrow H_n(S_n; Z)$$

和

$$f_*, g_*: H_n(X; Z_m) \longrightarrow H_n(S_n, Z_m),\ m \geqslant 2。$$

胡列维奇用他的同构定理把霍普夫分类定理推广到任意的 X 到（$n-1$）连通空间 Y 的映射的同伦分类上。1937年惠特尼用上同调把这个判据简化。

胡列维奇在他的第四篇简报中，研究无球状面的道路连通空间 X，也称零伦空间，即对于所有 $j \geqslant 2$，$\pi_j(X)=0$。胡列维奇发现，对于零伦的有限单纯复合形 X，X 的同伦型由其基本群决定。胡列维奇这个结果也可表述如下：

如果 X 和 Y 都是零伦有限维单纯复合形，若连续映射

$$f: X \longrightarrow Y,$$

使得对于所有 $r \geqslant 0$，

$$f_*: \pi_r(X) \longrightarrow \pi_r(Y)$$

都是双射，则 f 是同伦等价。

他这个定理开辟了同伦论一个重要的方向。1939年英国数学家J·H·C·怀特海(Whitehead, John Henry Constantine, 1904—1960)大大推广这个定理。他首先引进 n 等价的概念。

弧连通空间 X 和 Y 之间的连续映射

$$f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$$

称为 n 等价，如果同态

$$f_*:\pi_r(X,x_0)\longrightarrow\pi_r(Y,y_0)$$

对于 $1\leqslant r<n$ 是双射，对于 $r=n$ 是满射。

对于 n 等价映射 f，怀特海证明一个定理：

怀特海第一定理

(1) 若 f 是 n 等价，则对 $r<n$，f 诱导的奇异同调群的同态

$$f_*:H_r(X,Z)\longrightarrow H_r(Y;Z)$$

是双射，而对 $r=n$ 是满射。

(2) 如果 X, Y 还都是单连通空间，则逆定理也成立，不过如 X，Y 非单连通，逆定理一般不成立。

应该注意的是，怀特海第一定理并不意味着两个空间如具有相同同伦群，则它们有相同的同调群，反之有相同同调群，则有相同同伦群也不成立。

接着怀特海引入弱同伦等价的概念。

弱同伦等价 连续映射

$$f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$$

称为弱同伦等价，如果对于每 $n\geqslant0$，它都是 n 等价，即对每个 X，

$$f_*:\pi_r(X,x_0)\longrightarrow\pi_r(Y,y_0)$$

是双射。

怀特海第二定理 如 X, Y 是 CW 复合形，则任何弱同伦等价必定是同伦等价。

由此，决定空间同伦型问题部分归结为同伦群的计算，但这问题本身是极难的问题，至今所知有限。不过由此发展起来

大量技术和结果推动了拓扑学乃至整个数学的发展。

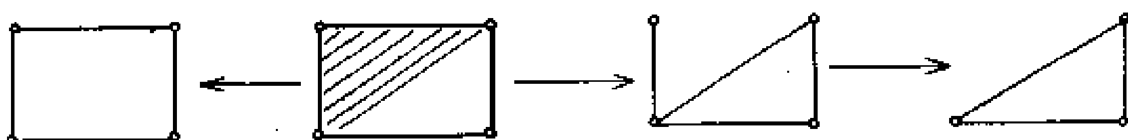
不管如何，同调群和同伦群仍然不足以决定同伦型。不过，同调和同伦之间的关系通过两条途径显示出来：

(1) 怀特海 *CW* 复合形，通过上纤维化的叠代。

(2) 波斯特尼可夫（Postnikov，Mikhail，1927—）系统，通过纤维化的叠代。

5.5 组合同伦群

1939 年，J·H·C·怀特海引入简单同伦型的概念，他称为"核"（*nuclei*）。对于有限单纯复合形 K，他引入两种操作，一种称为基本扩张：把一个新单纯形△添加在 K 上，使得△的所有面除了一个之外均属于 K。另一种称为基本收缩，这是基本扩张的逆操作，即由 K 去掉一个单形连同该单形的一个自由面。如果两个单纯复合形可以通过有限次基本操作互相变换，则称为具有相同核，即具有相同的简单同伦型。



箭头表示基本收缩

怀特海证明的重要定理是：任何复合形的核（简单同伦型）是组合不变量（即在重分下不变）。显然基本扩张和基本收缩保持复合形的同伦型，但是他不能决定核是否同伦型不变量。他只能证明下面的定理：

定理 两个单连通复合形具有相同简单同伦型当且仅当它们具有相同的同伦型。

两年之后（1941 年），对于具有基本群的情形他举出反例：透镜空间 L（7，1）和 L（7，2）具有相同同伦型但有不同的核。

怀特海还引入一个重要的不变量怀特海挠元，从而使简单同伦型代数化，其后它发展成 K 理论。

1972 年查普曼（Chapman，Thomas，1940—）最终证明怀特海挠元，从而也证明简单同伦型是拓扑不变量。

在 1939 年的论文中，怀特海还引进正则邻域的概念，他证明它是唯一的到组合等价。这个概念后来在证明高维庞加莱猜想中起作用。

为了得出同伦理论中合适的研究对象，J·H·C·怀特海引入 CW 复合形的概念，这个概念是以前单纯复合形和胞腔复合形概念的自然推广，然而，却符合实际应用中出现的许多空间，而且有一套有力的工具去研究它。

埃瑞斯曼在 1933 年研究格拉斯曼流形的同调群时，他就碰到这种情形：当把流形 X 剖分成一组胞腔时，p 维胞腔 σp 本身同胚于 R^p 中的开球体，但是，σp 在 X 中的边缘却不像通常的胞腔同胚于球面 S^{p-1}。J·H·C·怀特海发展了这种思想，他在 1941 年提出了“膜复合形”（*membrane complex*）的概念，后来，他把它改名为 CW 复合形，并建立其系统理论。这个名称中的 CW 是“闭包有限”（*closure finite*）以及具有“弱”（*weak*）拓扑的缩写，不过米尔诺不同意这个“弱”字，因为它同泛函分析中的弱拓扑的意义恰恰相反。不过这个概念已经约定俗成、无法更改了。

CW 复合形 空间 X 的一个分滤（*filtration*）是 X 的一个闭子空间的有限或无穷序列 $\{X^n, n=0, 1, \cdots\}$，它满足：

(1) $\{X^n\}$ 是 X 的一个覆盖。

(2) X^{n-1}是 X^n 的一个子空间，$n=0, 1, 2\cdots$。

如果 X 的一个分滤满足下列 3 条公理，则称为具有 CW 结构：

① X^0 是一个离散空间；

② 对每 $n>0$，(X^n, X^{n-1}) 是 n 维胞腔的添加；

③ X 由子空间族 $\{X^n\}$ 决定。

如果 X 具有一个 CW 结构，则称它为 CW 复合形。

CW 复合形可以通过归纳的步骤构造出来，从 X^0 开始，X^n 都是由 X^{n-1}添加若干个 n 维胞腔，得到最后

$$X=\bigcup X^n,$$

X^n 称为 X 的 n 维骨架。

CW 复合形是闭包有限的，即每个胞腔的闭包只同有限多个开胞腔相交。

CW 复合形具有“弱”拓扑。

CW 复合形具有好的拓扑性质，即它的空间是仿紧的。

有限维球体、球面、射影空间均为有限 CW 复合形。如果 CW 复合形的一个性质不依赖于 CW 结构的选取，则称为拓扑不变的，例如其维数。CW 复合形 X 的下列性质也是拓扑不变的：

(1) 有限性，即 X 只具有有限多胞腔。

定理 CW 复合形 X 是有限的当且仅当 X 是紧的。

(2) 局部有限性，即 X 的每个开胞腔只与有限多闭胞腔相交。

定理 CW 复合形 X 是局部有限的当且仅当 X 是局部紧的。

CW 复合形 X 是局部有限的当且仅当其闭胞腔形成 X 的

局部有限闭覆盖。

CW 复合形 X 是局部有限的当且仅当它是可度量化的。

(3) 可数性，X 具有可数多胞腔。凡局部有限且连通的 CW 复合形均可数。

定理 CW 复合形可数当且仅当它不含不可数离散子集。

局部有限的可数 CW 复合形具有很好的性质：

(1) 每个 m 维局部有限、可数 CW 复合形可嵌入在 R^{2m+1}中。

(2) 每个局部有限、可数 CW 复合形可嵌入在希尔伯特立方体I^{∞}中。反过来，如 CW 复合形 X 可嵌入在I^{∞}中，则 X 是局部有限且可数。

CW 复合形不难推广到相对情形，而且 CW 复合形仍然保持单纯复合形和胞腔复合形的许多性质，例如胞腔重分性质，以及胞腔逼近定理。

胞腔逼近定理 若 $f: Y \longrightarrow X$ 为 CW 复合形 Y，X 之间的映射，f 限制在 Y 的子复合形 D 是胞腔映射，则存在 f 的胞腔逼近 g，使

$$g|D = f|D。$$

CW 复合形应用很多，典型的是可实现性定理。

可实现性定理 CW 复合形之间的弱同伦等价就是同伦等价。

换言之，如 X，Y 是 CW 复合形，映射

$$f: Y \longrightarrow X$$

诱导出各维的同伦群的同构，则存在同伦逆

$$g: X \longrightarrow Y$$

是 f 的同伦逆。g 称为各同构

$$\pi_n\ (X,\ f\ (y_0))\longrightarrow\pi_n\ (Y,\ y_0)$$

的一个实现。

值得注意的是，这个定理并不意味着两个 CW 复合形如果对应的同伦群同构，则具有相同同伦型。其中重要的一点是这些同伦群同构必须由一个复合形之间的映射所实现。如果 $X\longrightarrow Y$，$Y\longrightarrow X$ 两方连一方映射都不能实现，即使同伦群对应相等也不能保证同伦等价。一个典型的例子是两个透镜空间 $L\ (p,\ q)$ 和 $L\ (p,\ q')$，它们具有相同的基本群 Z_p，但是它们具有相同的同伦型当且仅当 $q\cdot q'$或 $-q\cdot q'$是模 p 二次剩余，因此 $L\ (5,\ 1)$ 和 $L\ (5,\ 2)$ 具有同构同伦群但不具有相同伦型。

对于有限维 CW 复合形 X，Y，设

$$n=\max\{\dim X,\dim Y\},$$

则定理还可以改进为：

若 $f:Y\longrightarrow X$ 为映射且对任何 0 维胞腔 y_0 诱导出同构

$$f_k:\pi_k(Y,y_0)\longrightarrow\prod(x,f(y_0)),k=0,1,\cdots,n,$$

则 f 是同伦等价。

CW 复合形的用途是计算基本群及同伦群，以基本群为例，根据胞腔逼近定理，它只依赖于其二维骨架。

对于一维 CW 复合形，可得出：

(1) $\pi_1(S^1,e_0)\cong Z$。

(2) 若 X 为连通一维，有基点 CW 复合形，则

① $\pi_1(X,x_0)$是自由群，其生成元的基数小于或等于 X 的一维胞腔的集合的基数。

②如 X 只有有限多一维胞腔，则 $\pi_1(X,x_0)$是有限生成的。

③反之，如 $\pi_1(X, x_0)$是有限生成的，则 X 同伦等价于一个 CW 复合形只具有有限多一维胞腔。

对于任何维数>1的连通 CW 复合形，由于其基本群只依赖其一维骨架的映上象，因此，得到重要的结果：

若 X 为一连通，有基点的 CW 复合形，只有有限多一维胞腔，则 $\pi_1(X, x_0)$是有限生成的。

代数拓扑学的主要研究对象是复合形，复合形的空间称为多面体，因此多面体受到关注。由于复合形多种多样，我们引进绝对邻域收缩核的概念，因为它保留多面体的主要性质。

绝对邻域收缩核（*Absolute neighborhood retract* 简记为 *ANR*）是紧拓扑流形的推广，其定义为：X 称为 *ANR*，如果从正规空间 Y 的任何闭子空间 F 到 X 的映射

$$F \longrightarrow X,$$

可以扩张成 F 在 Y 中的某个领域 F' 到 X 的映射

$$F' \longrightarrow X。$$

许多常见的空间都是 *ANR*。事实上，我们有下列杜贡济（Dngundji，James，1919—1985）定理。

杜贡济扩张定理 赋范线性空间的凸子集都是 *ANR*。

由此，欧氏空间、球体、几何单形、立方体等都是 *ANR*。

ANR 具有下列性质：

（1）*ANR* 的收缩核是 *ANR*，*ANR* 的开子集是 *ANR*。

（2）如 X_1，X_2 是 *ANR*，则 $X_1 \times X_2$ 也是 *ANR*。

（3）如 X 为度量空间，X 为两闭子空间 X_1 和 X_2 的并集，如 $X_0 = X_1 \cap X_2$，X_1 和 X_2 是 *ANR*，则 X 也是 *ANR*。

（4）如 X 为 *ANR*，则 X 的闭子集 A 是 *ANR* 的充分且必要条件是包含映射

$$i: A \longmapsto A$$

是闭上纤维化。

ANR 的一个重要性质是紧 ANR 具有 CW 复合形的同伦型，这样自然产生出问题：是否可能 ANR 能同伦等价于有限 CW 复合形。1954 年波尔苏克在国际数学家大会上提出猜想：

波尔苏克猜想 紧的、具有的度量的 ANR 同伦等价于有限 CW 复合形。

他还对一类特殊的紧的、具有度量的 ANR，即允许砖式分解的 ANR 证明这个猜想。1959 年，埃克曼和希尔顿用同调分解的概念，证明单连通情形的波尔苏克猜想，其后一些特殊情形也得到解决，特别是克尔比（Kirby，Robin Cromwell，1938—）和西奔曼（Siebenmann，Laurence Carl，1939—）对 n 维紧流形证明该猜想。一般的波尔苏克猜想在 1977 年由威西特（West，James Edward，1944—）完全解决。他的方法是，给定一个紧的、具有度量的 ANR X，造出一个类胞腔（*Cell－like*）映射

$$Q \times I^{\infty} \longrightarrow X,$$

这是满映射，而且是同伦等价，其中 Q 是有限多面体，I^{∞} 是可数无穷多个 $I=[0, 1]$ 的直积。因此可证 X 与 Q 同伦等价。

1980 年，查普曼用怀特海挠元给出另外一个证明。

广义波尔苏克问题 有限控制空间同伦等价于 CW 复合形，它是否同伦等价于一个有限的 CW 复合形。

这里的一个重要概念是一个空间 X 被空间 Y 所控制（*dominated*）。

定义 X 被 Y 所控制，如果存在两个映射

$$f: X \longrightarrow Y$$

和

$$g: Y \longrightarrow X,$$

使得

$$g \circ f \simeq id_x。$$

这个概念的重要性在于如果一个空间 X 被一个 CW 复合形所控制，则它就具有 CW 复合形的同伦型。问题是如果 C 被有限 CW 复合形所控制（称为有限控制空间），它是否同伦等价于有限 CW 复合形呢？显然，两者相差不远。1965 年美国数学家麦泽（Mather, John, 1942—）证明了下面定理：

定理 若 X 为有限控制空间，则 $X \times S^1$ 具有有限 CW 复合形的同伦型。

由麦泽的结果可知：有限控制空间同伦等价于有限维 CW 复合形。

但是具有有限维 CW 复合形的同伦型未必具有有限 CW 复合形的同伦型。第一个反例是巴西数学家德·吕拉（de Lyra, C. B.）在 1965 年给出的。这样否定解决广义波尔苏克问题。但是，这并不等于这一类问题就此结束。同样在 1965 年，英国数学家沃尔（Wall, C. T. C. 1936—）开始一整套新理论，引出有限性阻碍理论。

在数学史上，这种类型的例子屡见不鲜，举出反例往往不仅是一个问题的否定解决，它往往还是一种新理论的产生。

不是所有正多边形都能用圆规和直尺作图，高斯就进而找出可用圆规和直尺作图的正多边形所应满足的充分必要条件，然后对于可作图的多边形再寻找作图的方法。

不是所有五次代数方程都能用根式解，伽罗华就进而找出

五次和五次以上代数方程可以用根式解的充分必要条件，从而开创了伽罗华理论，并进一步引导到整个抽象代数的新方向。即使是一般的五次方程，后来也寻找非根式解的方法，而不是就此停顿下来。因此，有了反例之后，再深入钻研下去，往往使我们的认识更上一个新台阶。

沃尔的理论就是这样，他继续找寻广义波尔苏克问题有肯定结论的充分必要条件，他找到了沃尔定理。

沃尔定理 连通的有限控制空间 X 同伦等价于一个有限 CW 复合形当且仅当 $\widetilde{W}(X)=0$。

实际上，沃尔把这个拓扑问题化为一个代数问题。他用的资料是 X 的基本群 $\pi_1(X)$。对于 X 是有限控制空间，$\pi_1(X)$ 必为有限表出的。对于 $\pi_1(X)$，造群环 $Z_{\pi_1}(X)$，它有一个约化射影类群 $\widetilde{K_0}(Z_{\pi_1})$，它后来发展成代数 K 理论的庞大分支，在此不作进一步讨论。这里只考虑有关拓扑的部分。

沃尔证明，对于每 X，可找到一个不变量，称为沃尔阻碍 $\widetilde{W}(X)$。反之每个 $\widetilde{K_0}(Z_{\pi_1})$ 的元素，都可以实现为某个连通有限控制空间 X 的 $\widetilde{W}(X)$，当然 X 的基本群 $=\pi_1$。因此，要想找到反例，只需找一个有限表出群 π_1，其 $\widetilde{K}_0(Z_{\pi_1})$ 非平凡即可。例如

$$\pi_1=Z/pZ,$$

p 为素数，即素数阶循环群，则 $\widetilde{K}_0(Z_{\pi_1})$ 同构于 p 次分圆域 $Q(e^{2\pi i/p})$ 的理想类群。我们知道 $p\leqslant 19$，理想类群为平凡，即只有 0 元素，而 $p>19$，理想类群均不平凡，因此，具有 $\pi_1=Z/pZ$ $(p>19)$ 的有限控制空间中，都存在 X，不具有有限 CW 复合形的同伦型。

沃尔阻碍有许多应用，例如1965年西奔曼在博士论文中用它给出一个开流形具有边缘的条件。

不过对于一些特殊的有限控制空间，还不能判定它们是否同伦等价于有限 *CW* 复合形。例如，圈式（*loop*）空间，*H* 空间以及 K（G，1），其中 G 是有限表出和无挠群。

对于多面体的同伦型的分类问题，首先是 J·H·C·怀特海认真加以考虑。1940年他解决单连通四维多面体 P 的同伦分类问题。他证明，这种 P 的同伦型由下面的代数不变量决定：

（1）上同调环 $H^*(P;Z)$ 和 $H^*(P;Z_m)$，对于所有 $m\geqslant 2$。

（2）这些上同调群之间的系数同态和包克斯坦同态。

（3）庞特里亚金—斯廷洛德的上同调运算

$$P:H^2(P;Z_{2r})\longrightarrow H^4(P;Z_{4r})。$$

反之，给出这些代数结构，满足适当条件，则可以造出对应的多面体 P。

对于高维情形，问题更为复杂。对于满足庞加莱对偶的五维单连通多面体的同伦型分类问题，在1882年由斯托克（Stöcker，R.）解决，而六维的情形，经沃尔、朱普（Jupp）、祖布尔（Zubr）等研究，最后由德国的布特（Buth，Joachim）在他的博士论文（1994）中解决。

另一类型的同伦分类问题来源于（$n-1$）连通的 $n+k$ 维流形分类问题。这类问题非常繁复，例如，在1984年格丁根召开的关于怀特海同伦分类问题会议上，德国数学家包斯（Baues，Hans Joachim，1943—）发表（$n-1$）连通的（$n+3$）维（$n\geqslant 1$）多面体的分类问题。不变量是可以计算的。例如具有同调群（$n\geqslant 4$）

$$H_i(X)=\begin{cases} Z_4\oplus Z_4\oplus Z, & i=n,\\ Z_8\oplus Z, & i=n+1,\\ Z_2\oplus Z_4\oplus Z, & i=n+2,\\ Z, & i=n+3,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

正好存在 4732 个单连通同伦型。

为此，包斯发展一整套代数同伦论，这套理论由 J·H·C·怀特海在 1950 年国际数学家大会上正式提出，其"最终目标就是构造一个纯代数理论，它等价于同伦论，就像'解析'射影几何学等价于'纯粹'射影几何学一样"。

怀特海的目标是：

(1) 用代数不变量来计算多面体 X，Y 的同伦型。

(2) 用 X，Y 的分类"数据"来计算映射的同伦类的集合 $[X, Y]$。

(3) 计算同伦等价群 $Aut(X)$。

这个目标离完全解决尚远，但现在已有些眉目。

5.6 球面同伦群

现在的问题是决定球面（保持基点）映射同伦类 $[S^m, S^n]$，依据 $m<n$，$m=n$，$m>n$ 三种情形，我们有：

$m<n, [S^m, S^n]=0$;

$m=n, [S^m, S^n]\cong Z$;

$m>n, [S^m, S^n]=\pi_m(S^n)$。

计算 $\pi_m(S^n)$是一个极为困难的问题，除了

$m>1, [S^m, S^1]=0$

之外，其它同伦群的计算都是相当困难，而这方面的任何进步都

是不容易的。

首先是德国数学家霍普夫，他考虑下一个维数 S^2 的最简单的情形

$$f: S^3 \longrightarrow S^2。$$

由于诱导的同调群的映射

$$f_*: H_*(S^3) \longrightarrow H_*(S^2)$$

不是 $H_*(S^3)=0$ 就是 $H_*(S^2)=0$，因此从诱导映射总得不到什么信息。1930 年，霍普夫成功地构造出来 S^3 到 S^2 的无穷多映射同伦类，另外他还类似映射度，对每一个映射 f 定义一个整数 $h(f)$，后来称为霍普夫不变量，它可以通过环连数来定义，他证明 $h(f)$ 是同伦不变量，而且证明当 f 同伦于常数映射，则 $h(f)=0$。对每个 $h(f)\neq 0$，通过构造霍普夫纤维化，得出 $h(f)=1$ 的 f，并进而得出互不同伦的映射 f，使 $h(f)$ 等于给定的整数，从而求出第一个非平凡的同伦群

$$\pi_3(S^2) \cong Z。$$

1935 年胡列维奇定义了高维同伦群，引进同伦序列，这是最原始的纤维空间的同伦正合序列，对于拓扑群 G，G 的子群 H 以及商空间 G/H 构成一个纤维空间

$$H \longrightarrow G \longrightarrow G/H,$$

它诱导出一个同伦正合序列

$$\cdots\cdots \longrightarrow \pi_n(H) \longrightarrow \pi_n(G) \longrightarrow \pi_n(G/H)$$
$$\longrightarrow \pi_{n-1}(H) \longrightarrow \cdots。$$

对于 $G=S^3, H=S^1, G/H=S^2$，就导出

$$\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2),\ n \geqslant 3。$$

霍普夫在看到胡列维奇的工作之后，开始把他 1931 年的论文推广到映射

$$f: S^{2n-1} \longrightarrow S^n,$$

并相应引入广义霍普夫不变量。他首先注意到如果 n 为奇数，对所有连续映射

$$f: S^{2n-1} \longrightarrow S^n,$$

有

$$h(f) = 0。$$

如果 n 为偶数，$\pi_{2n-1}(S^n) \supset 2Z$，特别当 $n = 2, 4, 8$ 时，$\pi_{2n-1}(S^n) \cong Z$。

对于研究同伦论有决定影响的是 1937 年荷兰数学家弗洛登塔尔（Freudenthal，Hans，1905—1990），他引进重要的同纬构造或同纬映射（*Einhängung*），从而对同伦论的计算开辟了新途径：

（1）他首先把不同维数球面的不同维数同伦群联系起来。

（2）他发现稳定同伦范畴，而且稳定同伦群还是第一个广义同调论。

（3）通过同纬映射，能够更好地开发同伦与同调（及上同调）的关系，而这是当时所知道的唯一工具。

同纬构造不难理解，尤其对于球面。从球面 S^2 和赤道 S^1 的关系，可知从 S^n 加上北极和南极，再通过经线连起来，就可造出 S^{n+1}来。我们不妨把 f：$S^m \longrightarrow S^n$ 经过同纬构造，得出同纬映射

$$sf: S^{m+1} \longrightarrow S^{n+1},$$

从而定义同态

$$E: \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1}),$$
$$[f] \longmapsto [sf]。$$

弗洛登塔尔证明：

①$i<2n-1$ 时，E 是同构；

②$i=2n-1$ 时，E 是满射；

③$i=2n$ 时，E 的象为广义霍普夫不变量为 0 的同伦类。

这样当 k 固定，$n>k+1$ 时，

$$\pi_{n+k}(S^n)\simeq\pi_{n+k+1}(S^{n+1})\simeq\cdots\simeq\pi_{n+k+h}(S^{n+k}),$$
$$h=1,2,\cdots$$

即所有 $\pi_{n+k}(S^n)$ 都互相同构，称为球面 k 次稳定同伦群，简记作 $G_k(k=0,1,2,\cdots)$。

弗洛登塔尔证明：

$$G_1=\pi_{n+1}(S^n)\cong Z_2\quad(n\geqslant 3),$$

从而开始求球面稳定同伦群的漫长道路。

另一方面，对于没有落入稳定范围的同伦群，那就得一个一个去计算。例如，弗洛登塔尔证明：

$$\pi_4(S^2)\cong Z_2,$$

可以看出，我们通常的球面的同伦群，每一步计算都很困难，而且都有具有有意义的发现：

$\pi_1(S^2)$ 基本群；

$\pi_2(S^2)$ 拓扑映射度；

$\pi_3(S^2)$ 霍普夫不变量；

$\pi_4(S^2)$ 同纬映射。

其后的所有同伦群均不是稳定的，计算起来很不简单。

对于数学家来讲，稳定同伦群的计算受到更多的关注。在 $G_0\simeq Z$，$G_1\simeq Z_2$ 之后，1941 年，苏联数学家庞特里亚金计算出 $G_2=\pi_{n+2}(S^n)=0(n\geqslant 3)$，而且长期信以为真，一直到 1949 年美国数学家 G·W·怀特海（Whitehead, George William,

1918—）才得出正确的结果：$G_2 \cong Z_2$。1951 年庞特里亚金也用另外的方法得到同样的结果。

由此可见计算同伦群是极为困难的，真正取得重大突破的是法国年轻数学家塞尔，他不仅准确地计算出 G_3，G_4，G_5，G_6，G_7，G_8，而且建立了一般结果、一般理论和一般方法。

他在 1951 年发表的博士论文中，首先得出一个一般结果：

除了 $m=n$ 和 $m=4i-1$，$n=2i$，$i=1$，2，…之外，π_m（S^n）均为有限群，特别是 G_k（$k=1$，2，…）均为有限群，而

$$G_0=\pi_n(S^n)\cong Z,$$

$$\pi_{4i-1}(S^{2i})\cong Z\oplus \text{有限群},$$

它是不稳定同伦群。另外奇维球面 S^n 的同伦群 $\pi_m(S^n)$，$m>n$ 时均为有限群。这样问题转为计算其 p 分量。

他的方法，不管是一般定理还是具体计算，用的是勒瑞（Leray，Jean，1906—）在 1945 年引进的谱序列。塞尔是第一个有效运用这个工具的数学家，其后各种谱序列成为计算的有效工具。

塞尔建立一个理论，称为 C 理论。用这个理论，可以推广许多定理，例如胡列维奇定理等。

下面我们介绍一下 C 理论。

定义 阿贝尔群的一个集体 C 称为一类，如果满足下列条件：

（1）C 包含单元素群；

（2）C 中群的同构象也属于 C；

（3）C 中群的子群和商群也属于 C；

（4）C 中群通过 C 中群的扩张也属于 C。

例如;

（1）所有阿贝尔群的类。

（2）所有有限生成阿贝尔群。

（3）所有有限阿贝尔群。

（4）所有有限阿贝尔群，其阶不被某素数集合中的素数整除。特别是所有 p 幂阶的阿贝尔群。

（5）所有挠阿贝尔群。

对于所有的类 C，对某些阿贝尔群 A，以及它们的映射

$$f:\ A \longrightarrow B,$$

可以定义：

（1）A 是 C 零，如 $A \in C$。

（2）f 是 C 内射，如 $Ker\ (f) \in C$。

（3）f 是 C 满射，如 $Coker\ (f) = \frac{B}{Im\ (f)} \in C$。

（4）f 是 C 双射，如是 C 内射也是 C 满射。

利用 C 理论，可把胡列维奇定理、怀特海定理推广到任何 C 情形。

在计算过程中，如果把 C 看成其阶与 p 互素的所有阿贝尔群、通过一些定理，可以计算出其 p 分量。例如，p 是素数，

$$\pi_m\ (S^3) = \begin{cases} 0, & \text{如 } m < 2p, \\ Z_p, & \text{如 } m = 2p。 \end{cases}$$

特别是，塞尔运用 C 理论证明：

①若 n 是奇数，

$$E^2: \pi_m(S^n) \longrightarrow \pi_{m+2}(S^{n+2}),$$

当 $m < p(n+1) - 3$ 时是 C 同构，其中 C 为阶与 p 互素的有限

阿贝尔群，且当 $m<n+4p-6$ 时，$\pi_m(S^m)$ 和 $\pi_{m-n+3}(S^3)$ 的 p 分量同构。

②若 n 是偶数，则 $\pi_m(S^n)$ 与 $\pi_m(S^{2n-1})\oplus\pi_{m-1}(S^{n-1})C$ 同构。其中 C 为有限交换 α 群类。由此推出，如 $2n-1<m<2n+2p-4$，则 $\pi_m(S^n)$ 与 $\pi_{m-1}(S^{n-1})$ 的 p 分量相等。

J 同态　对于充分大的 n，对于转动群 $SO(n)$，稳定同伦群 $\pi_m(SO)$ 和球面稳定同伦群 $\pi_m^S(S^0)$ 之间存在同态，称为 J 同态。

由鲍特周期性定理：

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi_m(SO)$	Z_2	Z_2	0	Z	0	0	0	Z	Z_2	Z_2

亚当斯得到如下定理：

①对 $m>0$ 且是 8 的倍数，则 J 同态是内射，且其象是 $\pi_m^S(S^0)$ 的直和因子。

②对 $m>0$ 且 $m\equiv1(\mathrm{mod}\ 8)$，则 J 同态是内射，且 $\pi_m^S(S^0)$ 包含 $Z_2\oplus Z_2$ 形的直和因子，使得第一个直和因子由 μ_m 生成，而第二个因子是 ImJ，其中 μ_m 是 $\pi_m^S(S^0)$ 的 α 阶元。

③对于 $m=4s-1\equiv3(\mathrm{mod}\ 8)$，$Im\ J$ 是 $\tau(s)$ 阶循环群，且是 π_m^s 的直和因子。$\tau(2s)$ 是 $B_{2s}/4s$ 的既约分数的分母，而 B_{2s} 是伯努利数。

④对于 $m=4s-1\equiv7(\mathrm{mod}\ 8)$，$ImJ$ 是 $\tau(s)$ 或 $\tau(2s)$ 阶循环群，并且存在一个同态

$$\omega:\pi_m^s\longrightarrow Z_{\tau(2s)},$$

使得

$$\omega \circ J : \pi_m^s \longrightarrow Z_{\tau(s)}$$

是满同态。因此当$|ImJ| = \tau(s)$时，ImJ 是 π_m^s 的直和因子。

5.7 阻碍理论

我们知道，同伦论主要研究映射，而映射的扩张是其中最主要的问题，它不仅存在于拓扑学中，也几乎存在于整个数学之中。对于映射的扩张有两个基本问题：

(1) 是否存在扩张。

(2) 扩张的分类。

阻碍理论的目标就是通过代数不变量来判断映射的可扩张性。

原始的障碍理论有：

(1) 布劳威尔的映射定理。

(2) 霍普夫的扩张定理。

(3) 霍普夫的分类定理。

但典型的障碍思想来源于 1940 年爱仑堡，特别是 1947 年斯廷洛德系统地建立阻碍理论。

设 X 为拓扑空间，K 为 CW 复合形，K^{n-1}表示 K 的 $(n-1)$ 维骨架，设 g 为映射

$$g: K^{n-1} \longrightarrow X,$$

问题是如何把它扩张成映射

$$g': K^n \longrightarrow X,$$

使得 $g'|K^{n-1} = g$。

这个问题表现出我们想通过逐次扩张最后能定义映射 $K \longrightarrow X$。实际上 K^n 比 K^{n-1}多的是一系列添加的胞腔 e^n，这样

问题就归结为把

$$f:\ e^n \longrightarrow X$$

扩张为

$$\bar{f}:\ e^n \longrightarrow X$$

的问题，而这又归结为把

$$f:\ S^{n-1} \longrightarrow X$$

扩张为

$$\bar{f}: B^n \longrightarrow X。$$

而 $f: S^{n-1} \longrightarrow X$ 决定 $\pi_{n-1}(X)$的一个元素，而这个映射能扩张到 B^n 当且仅当$[f]=0 \in \pi_{n-1}(X)$，因此我们对每个 $e^n \subset K$ 都对应$\pi_{n-1}(X)$的一个元素，从而引出一个同态

$$C_n(K) \longrightarrow \pi_{n-1}(X),$$

这样得到一个上链，其系数取自 $\pi_{n-1}(X)$。这个上链 $C_f \in C^n(K, \pi_{n-1}(X))$就称为扩张 $f: K^{n-1} \longrightarrow X$ 到 X^n 上的阻碍。由于 f 可扩张到 n 维骨架当且仅当阻碍 $C_f = 0$。

至此，C_f 还没有提供任何信息。但是 C_f 的性质使我们能够进一步操作。

(1) $\delta C_f = 0$，也就是 C_f 是上闭链，C_f 属于上同调类$[C_f] \in H^n(K; \pi_{n-1}(X))$。

(2) $[C_f] = 0$ 当且仅当 f 可以在 $n-1$ 上适当变形为 g 满足$f | K^{n-2} = g | K^{n-2}$，$g$ 可扩张为$\bar{f}: K^n \longrightarrow X$。实际上，对于每两个如此映射 $f, g: K^{n-1} \longrightarrow X$ 均可定义f, g 的差别上链

$$d_{f,g}^{n-1} \in C^{n-1}(K, \pi_{n-1}(X)),$$

而 $d_{f,g}^{n-1} = 0$ 当且仅当 f, g 同伦且在K^{n-2}上，$f = g$。

(3) f, g 同伦，则 $Cf^n = Cg^n$。

(4) 阻碍对于复合形的胞腔映射是自然的。

(5) 阻碍可以推广到相对情形。如果 $f, g: K \longrightarrow X$ 在 K^n 上重合，则

$$d_{f,g}^{n+1} \sim 0 \quad 当且仅当 \ f|K^{n+1} \sim g|K^{n+1}$$

相对于 K^{n-1}。

由此引出同伦论主要工具之一——爱仑堡—麦克莱恩复合形 $K(\pi, n)$，并得出重要定理：对于任何 CW 复合形 X，X 到 $K(\pi, n)$ 中映射的同伦类与 $H^n(X; \pi)$ 一一对应。

6　纤维空间和纤维丛

纤维空间和纤维丛现在已是代数拓扑学、微分拓扑学、几何拓扑学最重要的概念和最有用的工具。随着规范场理论与纤维丛理论关系的发现，它更成为当代数学和物理学最为常用的概念之一。对于微分流形的拓扑学和几何学，它更处于中心的地位。

6.1　前史

从某种意义上来讲，纤维丛的原始概念在数学中很早就有，不过只有在结构概念发展之后才能很好地认识它。从历史上讲，它可追溯到函数的观念，特别是曲线与曲面上定义的函数，这是对应于曲线或曲面上每一点，对应一个确定的数值。现在我们可以把数值改为一个空间，这就得出纤维空间的概念。其实这在微分几何学甚至微积分中很早就有，只不过当时不这么看。例如，曲线上每一点都对应一条直线，它或是切线或是法线。

1880 年左右，庞加莱在数学中引入向量场的概念，而这个概念在物理学中很早就产生了。但数学家的定义就非常麻烦，它涉及局部和整体的关系，而庞加莱着眼于大范围的情形，当时还缺少很好的工具，只得回到局部的情形。例如欧氏

空间 R^n 中的一块区域（开子集）Ω，在 Ω 上的向量场实际上是一个映射

$$X:\Omega \longrightarrow R^n,$$

$$(X_1,\cdots,X_n)\longrightarrow(X_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,X_n(x_1,\cdots,x_n)),$$

其中 $X_1,\cdots,X_n$ 是 Ω 上的实值函数，这些函数满足自治常微分方程组

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n},$$

这正是庞加莱所做的。但是，一旦把向量场由局部（一块区域）搬到一个流形（例如一个球面）上，向量场的直观概念我们仍然有，只是表述起来没有那么方便了。庞加莱以及后来布劳威尔、霍普夫等人的办法都差不多，那就是把它安置在一个大的欧氏空间 R^n 中，这在拓扑学中称为嵌入（*embedding*）。这不仅大大增加了麻烦，而且提出一些当时还没有很好解决的问题，例入可嵌入性等问题。

另外一个方法，正如定义流形的方法一样，是采用坐标图覆盖整个流形 M。在 M 的每开集 U 上都定义一个坐标图

$$\varphi:\ U\longrightarrow R^n,$$

于是在 $\varphi(U)$ 上定义一个向量场

$$x=(x_1,\cdots,x_n)。$$

如果

$$\varphi':U\longrightarrow R^n$$

是另外一个坐标图，$\psi=\varphi'\circ\varphi^{-1}$ 是由 $\varphi(U)$ 到 $\varphi'(U)$ 的 C^1 同胚，这样，向量场 X 通过 x 映到向量场 $x'=(x'_1,\cdots,x'_n)$，则

$$X'_j(\psi(y))=\sum_{j=1}^{n}X_i(y)\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\quad(1\leqslant j\leqslant n)。$$

这种局部方法一直在黎曼几何学中使用。而切向量“内在”的

定义是 1946 年薛华荔在他的名著《李群理论》中首先给出的。这时微分流形和纤维丛的概念逐步成熟起来。

纤维丛概念的另外一个来源是“活动标架”法。这从 19 世纪中叶研究三维空间中的光滑曲线时就已经开始。实际上，在讨论局部微分几何时，我们通常选定一个外围的坐标系，固定原点和坐标标架，这样，曲线的许多内在性质的计算可能由于选取坐标系而非常麻烦。这时，就考虑随曲线变化的活动标架，也就是把坐标原点和标架搬到曲线的每一点上，然后再研究 x 和标架如何随 x 在曲线上的运动而变化。实际上，有着长远力学传统的法国，是不难把描述运动的方法搬到几何上来。不过，这样研究的方式就大不一样了。首先引入活动标架方法的是法国数学家黎包库尔（Ribaucour，Albert，1845—1893）和达尔布，他们把流形上任意点 x 作为坐标原点，配以三个互相垂直的单位向量 e_1，e_2，e_3。现在的问题已经不是 x 关于 R^3 中固定坐标系如何变化，而是相对于变化的坐标系如何变化，这样就得出基本关系式

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i e_i,$$

$$de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} e_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

其中 σ_i 和 ω_{ij} 是 M 上一阶微分形式，如 M 是曲面，它们满足一些条件，这些条件由外微分 d 导出：

$$d(dx) = 0,$$

$$d(de_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)。$$

反之，一组微分形式满足这些条件就刻画 R^3 中曲面（到差一个 R^3 的等距变换）。

下一步是把标架的变换同李群结合起来。1905 年法国数

学家康顿（Cotton）把标架（x；e_1，e_2，e_3）看成是 R^3 中固定标架（0；u_1，u_2，u_3）在 R^3 的等距变换下的象。他进一步把 R^3 的等距变换群推广成任意李群及其保持原点不变的子群。1910 年 E·嘉当进一步发展了这种思想，把它应用于 n 维黎曼流形上。他已经统一考虑流形及其每点的切空间的正交标准基，以及其上的李变换群。不过他并没有把这些东西合在一起成为一个空间。产生这种想法的是美国数学家霍太林（Hotelling，Harold，1895—1973），他本人后来成为著名的统计学家。他在 1925 年正式把三维曲面运动“状态空间”连同其切向量空间——切平面分开再合起来变成四维空间，而不是像过去把平面和它的切（向量）平面一齐嵌入在 R^3 之中。

不过，他也认识到这与乘积空间不同。至此，纤维丛的基本元件大致齐备。

6.2 定义

纤维丛的定义比较复杂，它包括 5 个对象构成；

五元组 $\xi=(E,p,B,F,G)$称为纤维丛，其中 E,B,F 是拓扑空间，$p:E\longrightarrow B$ 是满连续映射，$p^{-1}(b)$同胚于 F，G 为有效作用于 F 上的(左)拓扑变换群，它可以看成如下坐标丛的等价类：

设$\{U_\alpha\}(\alpha\in\Lambda)$为 B 的开覆盖

$$\varphi_\alpha:U_\alpha\times F\simeq p^{-1}(U_\alpha)$$

为一族同胚映射，如果 U_α,φ_α 满足：

(1) $p\varphi_\alpha(b,y)=b(b\in U_\alpha,y\in F)$；

(2) 对于 $b\in U_\alpha\cap U_\beta$，则

$$g_{\beta\alpha}(b)=\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha\in G;$$

(3) $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ 是连续映射。

这样 E 称为丛空间或全空间，B 称为底空间，p 称为射影，F 称为纤维，G 称为结构群。

纤维丛是抽象的、复杂的数学概念，但是却有着广泛的实际背景。它反映了两种结构的自然结合：一种是曲线、曲面乃至一般的微分流形，另一种是曲线、曲面或流形上每点的性质，例如每一点的曲率（弯曲程度）、每一点上的电磁场强度以及每一点的位势等等。而这些点的性质往往用数量场、向量场、张量场来表示。这就使人自然联想到在流形上每一点都有一个新结构，其实这就是纤维丛的原始观念。

纤维丛的定义稍微烦琐一些，我们不妨先建立点直观的形象。顾名思义，纤维丛就好像是一束纤维扎在一起。比如说，一片长得很好的麦田就是一块纤维丛；我们头上的黑发也是一个纤维丛。从这些例子可以看出，纤维丛有两个要素：一个是纤维，一个是底空间。在麦田的例子里，一棵棵的麦子就是纤维，在头发的例子里，一根根头发就是纤维，在一块小羊羔皮上，每一根毛都是纤维。可是，“皮之不存，毛将焉附”，没有皮，毛就零零散散乱七八糟不成体统了，必须用皮来使它按照一定规则排起来，这种使毛按照一定规则排列的那张皮就是底空间，麦田里的麦子生长的那块田地也是底空间，头发生长的头皮也是底空间。所以纤维丛就是在底空间上每个点都长出一根纤维的总和。这种纤维在底空间上按照一定规则排列在一起，共同构成了纤维丛的整体，我们把它叫做“丛空间”。当然这一大堆纤维上每一点都是丛空间的一个点，为了识别两个点是不是在一个纤维上，那就要看“根”，也就是看它们是不是长在底空间同一个点上。我们再引进一个概念，叫做“射

影”。它是由从空间的每一点投射到底空间的一点的映射，也就是把纤维上的每个点都对应自己那个根。如果纤维丛只是这么简单，这也就没有什么可研究的了，问题是用同样的底空间、同样的纤维按照不同的规则，能够造出多少不同的纤维丛。我们举个例子，假设底空间是一个圆圈，圆圈上每一点的纤维是一条直线段，那你怎样造一个纤维丛呢？为了方便起见，不妨把纤维的中点粘在底空间上。现在你来造纤维丛，最简单的办法是把每根纤维垂直插在圆圈上，大家一般齐，这样插完以后所得的纤维丛的丛空间就是一个脖套，这种把纤维都规规矩矩地摆在一起所成的纤维丛太平凡了，我们把它叫做平凡丛。可是，如果要变些花样，就可以得到不平凡的纤维丛。也用同样的底空间、同样的纤维，只是在粘的时候让纤维沿着圆圈转 180 度，使得转完一圈后箭头朝上变为箭头朝下，这样所得的纤维丛整个看来就是“莫比乌斯带”。它也可以通过一条长方形纸带 $ABCD$ 造出来，只要把 AB 同 CD 粘在一起，使 A 同 C、B 同 D 成为一点，得到的就是有名的莫比乌斯带。它是拓扑学中重要而有趣的图形。沿它的一侧绕一圈可以走到另一侧，所以它是没有内外的单侧曲面。如果把 AB 同 CD 粘在一起，使 A 和 D、C 和 B 成为一点，就成为一个脖套，那就内、外有别了。这说明同样的纤维、同样的底空间可以造出不同的纤维丛。概括起来，纤维丛是一个复杂的结构，它由丛空间、射影、底空间、纤维、变换群等构成，而且必须满足一些必要的条件，比如从局部看是平凡的等。这些东西加在一起就是一个纤维丛。

一般纤维丛，其底空间和纤维可以是各式各样的。而底空间一般是微分流形或多面体，比如说球面、环面等等。纤维就

更不一定是根“纤维”，也可以是球面、球体、向量、李群等等。特别重要的是切丛，也就是把曲面上每一点切平面统统考虑在一起所构成的丛。此外还有法丛、余切丛等等。

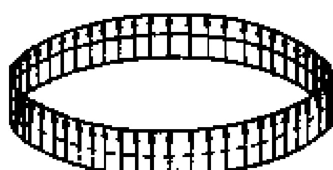


图 1　脖　套

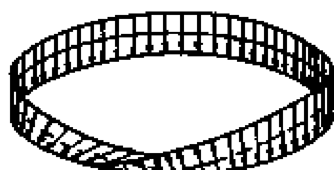


图 2　莫比乌斯带

在纤维丛的定义中，变换群 G 是极为重要的。它在微分流形及微分几何的研究中有着极其重要的意义。在代数拓扑学特别是同伦论的研究中，纤维丛的概念往往简化。第一步简化是纤维空间，它由（E，P，B，F）构成，它可以看成各个纤维 π^{-1}（b）的并集。第二步简化是纤维化。（E，P，B），这由一个满连续映射

$$p: E \longrightarrow B$$

构成，特别是塞尔在 1951 年引入的塞尔纤维化，要求连续映射 p 满足覆盖同伦性质：对于任何有限多面体 K 以及任何映射

$$f: K\times[0,1]\longrightarrow B$$

和映射

$$F_0: K\times\{0\}\longrightarrow E,$$

满足

$$f|k\times\{0\} = p^0 F_0,$$

则存在一个映射

$$F: K \times [0,1] \longrightarrow E,$$

使得

$$F: |k \times \{0\} = F_0,$$

$$p^0 F = f_{\circ}$$

塞尔纤维化也称弱纤维化。如果定义覆盖同伦性质时，代替有限多面体 K，可取任意空间，则纤维化称为胡列维奇纤维化或纤维空间，它们在同伦论中起着关键作用。

纤维丛的特点是拓扑变换群 G，由此，我们可以考虑以 G 为纤维的。G 在 G 上左平移地作用，这样得出的纤维丛 (P, p, B, G, G) 称为主纤维丛，它也可简记作 (P, p, B, G)。对于任何主丛 (P, p, B, G)，我们可以造出另一个纤维丛 $((P\times F)/G, p, B, F, G)$，称为该主丛的相伴的纤维丛，其中 $(P\times F)/G$ 是积空间的轨道空间，G 在 $P\times F$ 上的右作用如下：

对任何 $x\in P, y\in F, g\in G$，

$$(x, y)\cdot g = (x\cdot g, g^{-1}y)。$$

反之，对于任何纤维丛 $\xi=(E, p, B, F, G)$，我们还可以造主纤维丛 η，使得其相伴纤维丛是 $\xi=(E, p, B, F, G)$，则称 η 为 ξ 的相伴主纤维丛。

有了纤维丛的概念之后，过去许多熟悉的概念都可以从这个角度统一处理，我们可以举出一些例子：

(1) 积纤维丛 (BXF, p_1, B, F, G)，这时 p_1 为到第一个因子的射影，G 是 F 的恒同映射，与积纤维丛等价的丛称为平凡丛。

(2) 覆盖空间 (X, p, Y)，这时以具有离散拓扑的 $p^{-1}(y_0)$ $(y_0\in Y)$ 为纤维，以基本群 $\pi_1(Y_1, y_0)$ 的商群为结构群的纤维

丛。正规覆盖空间是主纤维丛。

(3)霍普夫丛，其特殊的例子是

(S^n, p, R^nP, Z_2)，

(S^{2n+1}, p, CP^n, S^1)，

(S^{4n+3}, p, HP^n, S^3)。

另外，通过霍普夫映射

$$p: S^{2\lambda-1} \longrightarrow S^\lambda \quad (\lambda = 2, 4, 8)$$

可得主丛

(S^3, p, S^2, S^1)，

(S^7, p, S^4, S^3)，

(S^{15}, p, S^8, S^7)。

(4) 许多齐性空间上的丛可由拓扑群特别是李群得到。设 G 为拓扑群，H 为其闭子群，K 为 H 的闭子群，K_0 为 K 中所含的最大的 H 的正规子群，这样

$$(G/K, p, G/H, H/K, H/K_0)$$

为纤维丛，p 为自然射影，由 $G \longrightarrow G/H$ 诱导得出，当 K 为 H 的正规子群时，则它为主纤维丛。

(5) 向量丛：若拓扑空间 E，B 和射影 p：$E \longrightarrow B$ 满足下列条件，则称为向量丛：

①对于 $b \in B$, $P^{-1}(b)$ 为实或复向量空间。

②变换群为 $GL(n, R)$ 或 $GL(n, C)$，例如微分流形的切向量丛以及余切向量丛和张量丛都是向量丛，向量丛对于微分拓扑学的研究至关重要。

6.3 纤维丛的引入

由纤维丛的定义可知许多概念，如覆盖空间和霍普夫映射

都包含纤维丛的影子，但正式引进纤维丛或纤维空间大约是从1930年到1950年间通过不同的方式进行的。

最早使用纤维（*Faser*）及纤维空间（*gefaserter Raum*）的是德国数学家塞弗特。他在1932年发表的研究三维流形的论文中引入一种特殊的“纤维空间”，与现在的纤维空间不同，主要是所有纤维不完全相同，也就是存在“例外纤维”；另外，在塞弗特纤维空间中没有“底空间”的结构，他只把它看成E的商空间。尽管如此，塞弗特纤维空间在研究三维流形中一直有重要地位。

第一个引入真正纤维空间的是美国数学家惠特尼。1935年，他引进的是具有特殊纤维——球面的纤维空间，因此，他称为“球空间”，1940年他改称为“球丛”，在1937年及1941年他对此做过两个报告，包括许多根本的结果，他还打算就此写一本书，始终没有完成。他的兴趣一直集中于“示性类”上。他于1936年和瑞士数学家E·施蒂费尔（Stiefel，Eduard，1909—1978）在1935年独立地定义这种示性类，后来称为施蒂费尔—惠特尼示性类。他的目的是用示性类来研究微分流形的拓扑学。对此，纤维丛只是一个工具，所以他的定义并非每个细节都讲得很清楚，但是他的定义是很一般的，他的思想是很明确的。所谓“球面空间”，实际上是其子空间$\{x\}\times S^m$的不相交的并集，而x是一个“底空间”X的点。惠特尼的底空间通常是微分流形或者是单纯复合形，前者是他引进的概念，而后者则是当时通用的拓扑对象，而且惠特尼的球面的维数是确定的，也就是没有退化纤维。惠特尼对整体与局部关系的概念也十分清楚，他知道全空间从局部来看是K的一个开集和球面S^m的直积。在惠特尼的论文中，他还引入一个更窄

的纤维空间的概念，它称为“正则”球面空间。实际上，它等价于后来的向量丛，并且举出切丛和嵌入在 R^n 的法向量丛。他还知道，当纤维是离散空间时，纤维空间是覆盖空间。

第三条途径走向纤维空间的是 E·嘉当和他的学生。E·嘉当已经在他的广义空间上引进联络理论，特别是他的“活动标架”空间实际上是主丛空间。而嘉当本人对于李群无疑是大权威，他的学生埃瑞斯曼跟着他作博士论文，1934 年完成了关于齐性空间，特别是格拉斯曼流形的同调的研究，为示性类理论开辟了道路。埃瑞斯曼引进许多重要的抽象概念，纤维丛即是其中之一。他的纤维丛概念是完备的，也就是具有李群和李群 G 在纤维上的作用。1941 年他和他的学生费尔波（Feldbau）引入纤维空间的完整概念，还引进主纤维空间及相伴纤维空间。他还发现通过光滑流形的浸没（*submersion*）引出新的纤维空间，特别是证明霍普夫射影造成纤维空间。

就在这些概念从不同角度引进来之后，纤维丛的各种性质也突显出来。到第二次世界大战之后，立刻成为拓扑学家注意的焦点。1949—1950 年度 H·嘉当讨论班以纤维空间为主题，把纤维空间规范化，立即引出同伦论、同调论以及微分几何的突破。同时，1951 年斯廷洛德的《纤维丛的拓扑学》一书出版，纤维丛成为数学，特别是拓扑和几何的标准工具，其分类问题及示性类理论是其中的核心。

6.4 纤维丛的分类问题

对于任何结构，都存在分类问题，也就是何时两结构等价。对纤维丛这种复杂的结构，首先定义丛映射。

对于具有相同纤维和结构群的两个纤维丛 $\xi=(E,p,B,$

$F, G)$和 $\xi' = (E', p', B', F, G)$，如果存在连续映射

$$\Psi: E \longrightarrow E',$$

使得下列图表可换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\ p\downarrow & & \uparrow p' \\ B & \xrightarrow[\psi]{} & B' \end{array}$$

则称 Ψ 为丛映射。如果 $B \equiv B'$，且存在丛映射，使 ψ 是恒等映射，则称丛 ξ 和 ξ' 等价。两纤维丛等价当且仅当其相伴的主丛等价。

这样，以拓扑群 G 为结构群的分类问题就归结为主纤维丛 $\xi(n, G) = (E(n, G), p, B(n, G), G)$ 的分类问题。而当 $E(n, G)$ 是 n 连通的($n \leqslant \infty$)，则 $\xi(n, G)$ 称为 G 的 n 万有纤维丛，它的底空间称为 G 的 n 分类空间。特别当 $n = \infty$ 时，它们分别称为 G 的万有丛和分类空间。这时，我们有分类定理：

分类定理　以 CW 复合形 B 为底空间的主 G 丛的等价类全体与由 B 到 $B(n, G)$ 的连续映射的同伦类集合 $\pi(B; B(n, G))$ 一一对应。

由此，丛的分类问题化成为同伦问题。

实际上，从 1935 年起，惠特尼就主要研究纤维丛的分类问题。1937 年他对球丛得出分类空间，即格拉斯曼流形 $G_{n,r}$，并断言底空间为 B、秩为 r 的球丛同构类为 $[B, G_{n,r}]$，即 B 到 $G_{n,r}$ 映射的同伦类($n \geqslant r$)，他给出证明概要，1943 年斯廷洛德完成了证明，后称惠特尼—斯廷洛德定理。

惠特尼还知道以 B 为底空间的球丛的丛空间只依赖于 B 的同伦型，这事实于 1939 年为 J·费尔德波所证明，另一方

面，惠特尼早在1935年对纤维丛 ξ 及连续映射

$$g: B' \longrightarrow B,$$

构造新纤维丛 $g^*(\xi)$，并称为 g 的拉回（*pullback*），在研究纤维丛的分类中至关重要。一般的结果到1949年至1950年才确定下来。这样丛的分类引向示性映射

$$f: B \longrightarrow BG \equiv (B(\infty, G)),$$

而示性映射诱导出上同调环的同态

$$f^*: H^*(BG) \longrightarrow H^*(B),$$

f^* 的象称为丛 E 的示性类，它是 f 的同伦不变量，也是丛的不变量，因此在丛理论中起着关键的作用。

在进入示性类的理论之前，还要叙述1956年米尔诺证明的下述定理：

存在定理 对于任意的拓扑群，存在万有纤维丛，也存在分类空间。特别是当 G 是可数 CW 群时，其分类空间也是可数 CW 复合形。

对于李群 $O(n)$，$U(n)$，$Sp(n)$，其分类空间分别是实格拉斯曼流形，复格拉斯曼流形和四元格拉斯曼流形。而 $SO(n)$ 的分类空间，则是定向的格拉斯曼流形，示性类即是由它们的上同调得出的。

6.5 示性类

示性类通常指施蒂费尔—惠特尼示性类、庞特里亚金示性类和陈（省身）示性类。

1. 施蒂费尔—惠特尼示性类

最早的示性类是1935年由施蒂费尔提出来的，他的博士论文是在霍普夫的指导下完成的。在论文中，他引进光滑流形

的切丛的某些示性同调类并加以研究。实际上，他是沿袭霍普夫关于流形上切向量场的研究。对于 n 维紧流形，问题是什么时候存在处处不为零的 m 个切向量场（$m\leqslant n$），而且它们在 X 上每点的 m 个切向量都是线性独立的（因此也不等于0）。对于微分几何学，$m=n$ 的情形特别有趣，在这种情形下，称为 M 上存在平行结构或可平行化。为了解决这个问题，施蒂费尔首先引进后来所谓的施蒂费尔流形 $V_{n,m}$，即由 R^n 中所有线性独立的 m 个向量序列构成的空间。于是施蒂费尔考虑 R^n 中的 m 场，即连续映射

$$X^{(m)}: A \longrightarrow V_{n,m},$$

他问：如果 A 同胚于 $r+1$ 维球体 D^{r+1}，B 同胚于其边界 S^r，那么 B 上 m 向量场何时可扩张到 A 上？

他证明，可扩张的条件是 m 场的同伦类 $\alpha\in\pi_{n-m}(V_{n,m})$ 等于0。现在知道：

$$\pi_{n-m}(V_{n,m})=\begin{cases}Z, n-m \text{ 为偶数或 } m=1,\\ Z_2, n-m \text{ 为奇数或 } m\neq 1。\end{cases}$$

他称 α 为 m 场的“特征”，由这个特征，他最后得到一个同调类

$$F_{m-1}\in H_{m-1}(M;\pi_{n-m}(V_{n,m})),$$

F_{m-1}只依赖于 M 的微分结构，这就是原始的施蒂费尔示性类。

作为示性类的应用，施蒂费尔证明：任何紧、可定向三维光滑流形都是可平行化的。他还证明：对实射影空间 PR^{4k+1}，$F_1\neq 0$。

施蒂费尔示性类虽然比霍普夫的示性数大大前进了一步，但是他不知道上同调，也不知道纤维丛，而这正是惠特尼的独创性工作。实际上，施蒂费尔只考虑微分流形的切丛的示性

类，而惠特尼考虑的要广得多，他考虑任意球丛（E，B，p）的底空间 B 也可以是任意局部有限的单纯复合形。他把示性类定义为施蒂费尔流形 $V_{n,m}$ 的整系数同调类，他指出，$V_{n,m}$ 的同调群

$$H_{n-m}(V_{n,m})\cong\begin{cases}Z, m=1 \text{ 或 } n-m \text{ 为偶数,}\\ Z_2, m\neq 1 \text{ 且 } n-m \text{ 为奇数。}\end{cases}$$

1937 年，他改用上同调定义示性类。1940 年他指出，对于连续映射

$$g: B'\longrightarrow B,$$

如果 $E'=g^*(E)$ 为 E 的拉回，则

$$W_r(E')=g^*(W_r(E))。$$

同时他给出惠特尼的和公式，定义同一底空间上两球丛 E'，E'' 的惠特尼和 $E'\oplus E''$，并指出其示性类 $W_r(E'\oplus E'')$ 满足公式

$$W_r(E'\oplus E'')=\sum_i W_i(E')\cup W_{r-i}(E''),$$

其中 $\cup$ 表上积。他指出当 $r\geqslant 4$，证明极难，1941 年他只给出 E 及 E' 都是线丛的证明。公开发表的第一个证明是吴文俊在 1948 年给出的，他还用向量丛取代球丛，同年陈省身也发表了另一个证明。惠特尼还给出示性类的形式幂级数以及对偶示性类的概念。他证明 E 是平凡丛则对所有 j，W_j（E）$=0$。

1940 年他考虑当 B 是 C^r 流形，其上有切向量丛 T（B）和法向量丛 N（B）。如果 B 嵌入在某欧氏空间 R^n 中，$T\oplus N$ 是平凡切丛 T（R^n）在 B 上的限制，从而形成幂级数

$$W(T\oplus N,t)=W(T;t)\cup W(N;t)=1。$$

因此，由 $W_i=W_i(T)$ 得出对偶示性类 $\overline{W}_i=W_j(N)$，它们满足

$$(1+W_1t+\cdots+W_mt^m+\cdots)^{-1}$$
$$=1+\overline{W}_1t+\cdots+\overline{W}_mt^m+\cdots$$

作为惠特尼示性类的应用，惠特尼本人主要应用示性类来研究浸入问题。例如，他证明八维实射影空间 $P_8(R)$ 不能浸入到 R^{14}中，但能浸入到 R^{15}中，他的理论后来为吴文俊等所发展。

1950 年，吴文俊运用了当时发现还不久的更强的拓扑工具——上同调运算，特别是斯廷洛德平方 Sq，由此得出

$$Sq^r W_s = \sum_{t=0}^{r} \binom{s-r+t-1}{t} W_{r-t} W_{s+t}$$

这漂亮公式，其中 $\binom{p}{q}$ 为（模 2）二项系数。他指出：球丛的施蒂费尔—惠特尼示性类只由维数为 2^k 的类完全决定。上述公式还被应用于解决另外一大问题：微分流形的示性类的拓扑不变性，即与微分结构无关。微分流形的施蒂费尔—惠特尼示性类拓扑不变性虽在 1950 年已由托姆证明，而吴文俊几乎同时通过同调性质把示性类明显表出，这就是著名的吴（文俊）公式：

设 M 是紧 n 维微分流形，则全施蒂费尔—惠特尼示性类 $W = SqV$，其中

$$V = 1 + V_1 + \cdots + V_n,$$

称为吴（文俊）类，它由等式

$$V = SqX, X \in H^*(M)$$

唯一决定。由这一公式可以使施蒂费尔—惠特尼示性类的计算成为例行公事，从而导致一系列应用。例如非定向流形的配边理论的标准流形（实射影空间及吴—道尔德（Dold, Albrecht, 1928—）流形）的完全决定，这最终使施蒂费尔—惠特尼示性类理论成为拓扑学中最完美的一章。

1956 年米尔诺参考希采布鲁赫对陈省身示性类的定义给

施蒂费尔—惠特尼示性类一个公理刻画：

$SW1$ 对每一个向量丛，对应一序列上同调类

$$W_i(\xi)\in H^i(B(\xi),Z_2),\ i=0,1,2,\cdots$$

称为 ξ 的施蒂费尔—惠特尼示性类。若 ξ 是 n 维平面丛，则类 $W_0(\xi)$ 等于单位元素 $1\in H^0(B(\xi);Z_2)$，且当 $i>n$ 时，$W_i(\xi)=0$。

$SW2$ （自然性）若

$$f:B(\xi)\longrightarrow B(\eta)$$

被丛映射

$$\bar{f}:\xi\longrightarrow\eta$$

所覆盖，则

$$W_i(\xi)=f^*W_i(\eta)。$$

$SW3$ （惠特尼乘积公式）若 ξ 和 η 是同一底空间上的向量丛，则

$$W_k(\xi\oplus\eta)=\sum_{i=0}^{k}W_i(\xi)\cup W_{k-i}(\eta)。$$

$SW4$ 对于射影直线 RP' 上的直线丛 γ_1^1，施蒂费尔—惠特尼示性类 $W_1(\gamma_1^1)\neq0$。

由此可得，如果 R^n 丛 ξ 具有 k 个无处线性相关的截面，则

$$W_{n-k+1}(\xi)=W_{n-k+2}(\xi)=\cdots=W_n(\xi)=0。$$

从而 ξ 可以分解为惠特尼和

$$\xi=\varepsilon\oplus e^{\perp},$$

其中 ε 是平凡丛，$e^{\perp}$ 是 $n-k$ 维丛。

对于任何 n 维平面丛 ξ，它具有全空间 E，底空间 B 以及射影 $p:E\longrightarrow B$，可以通过斯廷洛德平方运算 Sq 以及托姆同构

$$\phi:H^k(B)\longrightarrow H^{k+n}(E,E_0),$$

构造出来施蒂费尔—惠特尼示性类

$$W_i(\xi)=\phi^{-1}Sq\phi(1),$$

其中 ϕ 是两个同构的合成

$$H^k(B)\xrightarrow{p^*}H^k(E)\xrightarrow{\cup u}H^{k+n}(E,E_0),$$

E_0 是 E 中非零元素的集合，u 是基本上同调类。这样，可以证明施蒂费尔—惠特尼示性类的存在性，而且对于仿紧空间上每个向量丛，都存在唯一对应的上同调类序列，满足施蒂费尔—惠特尼示性类的 4 条公理，而且是唯一确定的。

2. 庞特里亚金示性类

比起施蒂费尔—惠特尼示性类来，庞特里亚金示性类更为复杂，也包含更多的信息。庞特里亚金引入这个示性类的动机是因为惠特尼在引入他的示性类时，并没有考虑它同格拉斯曼流形的上同调之间的关系，而庞特里亚金恰巧在这一点上取得了突破。1942 年庞特里亚金发表了一个摘要，在摘要中他只考虑可定向的 C^r 流形 M 和 M 的切丛 T（M）。他考虑把 M 嵌入到某个欧氏空间 R^n 中，这样，他建立切丛与定向格拉斯曼流形 $G'_{n,m}$ 一一对应。他研究 $G'_{n,m}$ 的胞腔分解，计算其同调群，大致对应 1934 年埃瑞斯曼对一般格拉斯曼流形 $G_{n,m}$ 的结果，但埃瑞斯曼用的是舒伯特（Schubert, Hermann, 1848—1911）流形。在论文中，他选择一些下链，它们在某些情形下是下闭链，这就是庞特里亚金的示性闭链。庞特里亚金的详细论文在 1947 年发表。吴文俊在开始他的研究时，只有庞特里亚金的一个简报（1942）及一篇论文（1947）。庞特里亚金用的是同调，吴文俊在博士论文中，首先把它改造成上同调，并对其胞腔分解等做了一系列简化。吴文俊还进行对偶胞腔剖

分，选出一系列函数，它们对应的上同调类除了已知的施蒂费尔—惠特尼示性类之外，还有一系列整系数示性类是以前从来没有定义过的。吴文俊命名为庞特里亚金示性类

$$P_k \in H^{4k}(G'_{n+m,m};Z)。$$

另外还有欧拉示性类

$$e_m \in H^m(G'_{m+n,m};Z),$$

而且它们在上同调环 $H^0(G'_{m+n,m};Z)$ 中满足下列关系

$$e_m \smile e_m = p_{2m}。$$

他还证明庞特里亚金示性类与施蒂费尔—惠特尼示性类之间关系，如

$$\pi: H^{4k}(B,Z) \longrightarrow H^{4k}(B;Z_2)$$

是自然同态，则

$$\pi P_k = W_{2k} \smile W_{2k};$$

如

$$\pi: H^m(B;Z) \longrightarrow H^m(B;Z_2),$$

则对

$$e \in H^m(B;Z),$$

$$\pi e = W_m。$$

1951 年吴文俊回国之后，运用类似庞特里亚金平方等上同调运算，先后证明模 3 及模 4 庞特里亚金示性类的拓扑不变性类，并得出明显表示，其后引入另一类 Q_p^i，证明其拓扑不变性，由此推出某些庞特里亚金类的组合（模 p）的拓扑不变性。但是一般庞特里亚金示性类只是微分结构不变量而不是拓扑不变量，对此 1956 年米尔诺曾举出具体实例。1956 年托姆引入有理庞特里亚金示性类并证明它是组合（PL）不变量，苏联数学家罗赫林（Rokhlin，Vladimir，1919—1984）及施瓦

兹（Schwarz, Albert Solomonvich, 1934—）也证明了这点。1965年诺维科夫（Sergei Petrovich Novikov, 1938—）证明有理庞特里亚金示性类是拓扑不变量，而模 p（p 为素数）庞特里亚金示性类是拓扑不变量的充分必要条件到1995年才得出。

3. 陈（省身）示性类

1945年陈省身把庞特里亚金的思想推广到复向量丛（实际上是相应球丛）上。一开始，他只考虑复流形上切丛，而且他使用上同调而不是同调。1948年吴文俊在他的博士论文中，把陈示性类推广到任意有限单纯复合形上的任意复向量丛，在这方面，陈省身和吴文俊都是使用复格拉斯曼流形 $G_{m+n,m}(C)$，而且用的都是埃瑞斯曼通过舒伯特流形对 $G_{m+n,n}(C)$ 的胞腔分解。这样，把对应庞特里亚金的胞腔复化，就可得出对应的上链，实际上是上闭链，并得出其上同调类

$$c_k \in H^{2k}(G_{m+n,m}(C);Z)$$

经过示性映射和拉回，这就是复向量丛的陈示性类。

实际上，陈省身是由大范围微分几何问题，特别是从几何来计算示性类的方法，他发现非常漂亮的算法，由流形 M 上 $U(n)$ 上丛 P，定出 P 上的联络，联络引出其曲率形式，它表示示性类。陈省身还用微分形式证明，陈示性类 c_k 是上同调代数 $H^*(G_{m+n,m}(C);Z)$ 的生成元。吴文俊则给出一个拓扑的证明。他还把施蒂费尔—惠特尼乘积公式推广到陈示性类，即

$$c(E'\oplus E'';t)=c(E';t)\smile c(E'';t),$$

其中 $c(E;t)=\sum_i c_i(E)t^i$ 是复向量丛的全陈示性类。对于复向量丛 (E,B,P)，可定义其共轭复向量丛 E^+，只是在每个纤维 E_b 上定义的复结构，由

$$(\lambda, 2) \longrightarrow \bar{\lambda} Z$$

定义。吴文俊证明

$$c_k(E^+) = (-1)^k c_k(E)。$$

由此，对于(E,B,P)是实向量丛，可定义 B 上复向量丛$E(C) = E \oplus R^C$，可得

$$c_k(E(C)) = (-1)^k c_k(E(C)),$$

即对奇数 k

$$2c_k(E(C)) = 0。$$

吴文俊进而证明

$$P_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E(C))。$$

由此庞特里亚金示性类的性质可由陈示性类导出。

陈示性类和它衍生的陈示性数、陈特征标等在整个数学中都起着重要作用，特别是代数几何学、复解析几何学、K 理论、微分几何学，乃至数论等，它几乎无处不在。

7 微分流形

7.1 微分流形的引入

微分流形是现代数学中最主要的概念之一。应该说，比起抽象的拓扑空间和复合形来说，它是最接近我们通常研究的几何对象。实际上，从几何学一开始，我们研究的对象有两类，一类是直线图形，它们由点、直线、平面、立体等构成，先是三角形、多边形、多面体，后来发展成一般的多胞形及一般单形的概念。它们是构成组合拓扑学的基本对象，对以后的同调论和代数拓扑学的研究有着重大作用。另一类是弯曲图形，如圆、椭圆、双曲线、圆柱面、球面、球体等等。微分流形可以看成是曲线和曲面的推广。黎曼在 1854 年已经引进这个概念，他的观念是从物理上来的。曲线可以看成点运动的轨迹，曲面可以看成曲线运动的轨迹，这样下去，$n-1$ 维流形运动的结果就成为 n 维流形。1895 年庞加莱在引进拓扑学的同调概念的同时，也引进了流形的概念。他的办法并不新鲜，是在 n 维空间中用 P 个方程来定义的（如果有边界的话，再加上一些不等式)，满足这些方程的点的集合就是流形。从拓扑学的角度来看，这种定义太细致了。比如说，一个足球，你踢上一脚或踩它一下，表示它的方程马上就改变，但只要足球不破，

它的拓扑性质并没有变化，而且，把它表示成多面体的外表面或表示为球面并没有太大差别。这样，几何中研究的凸性以及微分几何所研究的曲率对拓扑学来说不用考虑。因此，用过于精细的方程组和不等式往往增加不必要的麻烦，而且维数越高，就越复杂。另外，这种定义还要依赖于它所在的 n 维空间，每次研究都要拿个“容器”把它装在里面，实在多此一举。因此，我们希望用“内在”的性质来定义微分流形。

由于微分流形十分重要和常见，我们这里给出其定义：微分流形是具有微分结构的局部欧氏空间。因此微分流形的定义由两部分构成，一是局部欧氏空间，可称为其拓扑部分；另一是微分结构，可称为它的结构部分。

所谓局部欧氏空间是指 X 是豪斯道夫拓扑空间，其中每点 $x\in X$，都可以找到 x 的一个邻域 U 同胚于 R^n 中一个开集。设 φ 为同胚，

$$U \longrightarrow R^n,$$

这样，对 X 中每个点 x，都有 n 个实数（x_1，…，x_n）与之对应，它们自然可以称为 x 的坐标。而（U，φ）称为 x 处的一张坐标图，这就如同我们世界地图册中的一张地图，它画出一个国家或一个地区的地理位置。显然，用一张地图来画出世界上所有地点附近的状况是不可能的，因此，要了解全世界的地理，必需：

（1）有一本地图册，每一点至少属于其中一张地图。

（2）如果一点属于其中两张地图，如何变换，才能使这两张地图能合在一起。

因此，对于一个局部欧氏空间 X，我们定义 X 的 C^r 图册（C^r *atlas*，$0\leqslant r\leqslant\infty$）为一族坐标图

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\alpha \in A\}$,

满足：

①所有 U_α 的并集覆盖 X，即 $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$；

②对于任何 $\alpha, \beta \in A$，如 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$，

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是由 R^n 的开集到 R^n 的开集的一个 C^r（即 r 次连续可微）同胚映射，且其雅可比行列式处处不等于 0。

这样，我们可以定义 X 的两 C^r 图册等价。如果两个 C^r 图册的并仍是 C^r 图册，则称为它们等价，那么，C^r 结构则是 C^r 图册集合的等价类。如果 X 上存在 C^r 结构，则称为 C^r 流形。从拓扑学的角度看，C^1，C^r，C^∞ 流形的结构实际上差别不大，但是与 C^0 结构即拓扑流形及 C^ω 结构即解析流形结构一般相去甚远。

外尔首先在他 1913 年出版的名著《黎曼面的观念》中给出二维复流形的内在定义，这种定义后来成为微分流形定义的模范。为了理解这个定义，我们可以举一个简单的例子：自行车内胎可被看成一个标准的环面，它可以通过一个圆周环绕一个点走一个圆周而生成，这是黎曼的想法；也可以通过三维空间的方程来定义，这是庞加莱的想法。现在“内在”的定义大致是这样的：新车胎是完完整整的一个好环面，在骑的过程中难免出现破洞，有了破洞就要补，补的时候大都用一块圆皮，这块圆皮不仅把洞补上，也把洞口旁边都给覆盖上。假如旁边再破一个洞，补这个洞的圆皮和原来的那块圆皮就会有互相重叠的地方。如果这内胎用久了，就有可能每个地方上面都覆盖着圆皮，这种内胎骑起来和没补过的内胎也还是差不太多，它仍旧是一条内胎，但是已经成为（有限多块）互相重叠的补钉

（圆皮）的集合了。我们描述内胎也就只需要了解：

(1) 补钉是什么；

(2) 补钉是怎样相互重叠的。

这样就不必管它外围空间是什么，也不必考虑它的定义方程了。对于微分流形来讲，补钉就是欧氏空间（或其中一块开集）。补钉相互重叠的方法，有的是光滑的（好像光溜溜的新轮胎），这就称为微分结构；有的是见棱见角的，就称为分段线性结构（简写为 PL）；有的是不怎么光滑的，但还保持连续性（比如坑坑蹩蹩的），就称为拓扑流形。这样一来，流形从局部看来（就和补钉一样）都差不多，差别只是它们相互重叠的方式。比如你用几块补钉补满一个球，和用同样这几块补钉补满一条内胎，补钉和补钉之间从整体上看，它们的连接方式是不会一样的。

常见的流形大都可以通过变换群构造出来。变换群的一个重要概念是 x 的轨道 $o(x)$，也就是所有 $gx(g\in G)$ 的集合。不难证明：对任何两点 $x,y\in X$，x 的轨道 $o(x)$ 和 y 的轨道 $o(y)$ 或者重合或者不相交。这样，在 X 中可以导出一个等价关系：$x\sim y$ 当且仅当 $o(x)=o(y)$，也就是 x,y 属于同一轨道。在同一轨道上的点构成等价类。

对任何等价关系，X 的点分成等价类，等价类的集合也记作 $X/\sim$，当 X 是拓扑空间时，可在 $X/\sim$ 上引进自然的拓扑，即等价类的集合在 $X/\sim$ 中为开集当且仅当这些轨道的点集的并在 X 中为开集。在这个“商拓扑”之下，$X/\sim$ 成为拓扑空间。具体到变换群 (x,G) 上，可称为轨道空间 X/G，因此，只要空间 X 有一个拓扑变换群，就产生一个相应的轨道空间。通过这种造法可以造出一系列在代数拓扑学中常见的空间，特别是由

李群得出的齐性空间。

最常见的出发点是欧氏空间 R^n，球面 S^n，特别是球面 S^n 上有许多有限变换群，由此可得出射影空间和一般透镜空间。

下面我们可把 S^n 看成 R^{n+1} 中的单位球面，即满足方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$$

的标准球面。其上最简单的变换群是 Z_2，即由两元素构成的群，其中一个元素是么元，即恒同映射

$$1:(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\longmapsto(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})。$$

另一个是对经映射

$$-1:(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\longmapsto(-x_1,-x_2,\cdots,-x_{n+1})。$$

这样，实射影空间 RP^n 就定义为 S^n/Z_2。

在定义复射影空间 CP^n 时，我们可以考虑 $n+1$ 维复数空间 C^n 中的球面 $S^n(C)$，

$$\{Z\mid |Z_0|^2+|Z_1|^2+\cdots+|Z_n|^2=1\},$$

在其上有圆 S^1 的作用，S^1 的作用看成是转动 α，也就是乘以 $e^{\alpha i}(0\leqslant\alpha<2\pi)$。这样 S^1 在 $S^n(C)$ 上的作用是

$$e^{\alpha i}:(Z_0,Z_1,\cdots,Z_n)\longmapsto(e^{\alpha i}Z_0,e^{\alpha i}Z_1,\cdots,e^{\alpha i}Z_n)。$$

这样 $S^n(C)/S^1$ 就是复射影空间，它是 C^{n+1} 中过原点的所有复直线的集合，它也相当于 S^{2n+1}/S^1。

定义复射影空间时的变换群 S^1 如果换成离散群 Z_k，则可以得出各式各样的一般透镜空间，它的作用可表示如下：

$$(k;k_1,\cdots,k_n):(Z_0,Z_1,\cdots,Z_n)$$

$$\longmapsto(e^{\frac{2\pi i}{k}}Z_0,e^{\frac{2\pi ik_1}{k}}Z_1,\cdots,e^{\frac{2\pi ik_n}{k}}Z_n)。$$

不过要求所有的 k_i 均与 k 互素，这样 $S^n(C)/I_k$ 就定义为一般透镜空间，记作 $L(k;k_1,\cdots,k_n)$，它是 $2n+1$ 维空间。当 $n=$

1，$L(k;k_1)$称为透镜空间，这是十分重要的三维空间。值得注意的是，由于与 k 互素的数不少，特别当 k 为素数时，就产生多种不同的透镜空间和一般透镜空间，它们一般具有不同的拓扑特征，可是任何 $L(k;k_1,\cdots,k_n)/S_1$ 都同胚于 CP^n。

如果流形是内在定义的，我们当然希望能具体表示它们，以便更好地认识其性质，这就首先要把它们安装到欧几里得空间中去，安装是一对一时，称为嵌入，有自交点时称为浸入。惠特尼在 1936 年证明，微分流形 M^n 可浸入到 $2n$ 维欧氏空间R^{2n}中，也可嵌入到 R^{2n+1}中。1944 年他把这个数字各降 1。20 世纪五六十年代吴文俊等人建立示嵌类理论，通过诸如示性类、K 论、同伦论逐步把结果改进。到 1980 年，对于流形的浸入结果达到最佳，即任何 n 维流形都可浸入在 $R^{2n-a(n)+1}$中，其中 $a(n)$ 为 n 的二进位展开中 1 的数目。这个数目不能再改进了，因为存在流形不能浸入在 $R^{2n-a(n)}$ 中。当然对于具体的流形仍有改进的余地。

庞加莱遗留下来的两大猜想——庞加莱猜想与主猜想再一次绕过三维和四维在 20 世纪 60 年代取得突破。五维及五维以上的广义庞加莱猜想是指 n 维的单连通闭流形，与球面的对应同伦群相同，则与球面同胚。1960 年斯梅尔（Smale, Stephen, 1930—）对于微分流形证明广义庞加莱猜想，他先是证明维数≥6 的情形，很快推进到维数≥5，他用的方法是莫尔斯理论，这是莫尔斯理论的又一胜利。其后斯陶林斯（Stallings, Robert, 1935—）和齐曼（Zeeman, Eric Christopher, 1925—）又对维数≥5 的 PL（分段线性）流形加以证明。英国数学家纽曼（Newman, Maxwell Herman Alexander, 1897—1984）和康耐尔（Connell）把它翻译成为拓扑的情形，

从而完全解决五维及五维以上流形的庞加莱猜想。

从庞加莱的时代起，三维、四维流形的拓扑学进展缓慢，可是20世纪50年代起，五维及五维以上流形的拓扑学却取得突破。首先是1954年托姆（Thom，Rene，1923—）配边理论的建立，实际上它对于微分流形进行一个粗分类。两个流形称为配边，如果它们共同构成一个有边缘流形的边缘。这样，闭微分流形在配边等价之下形成的等价类构成分次代数。通过托姆复形同伦群的计算以及示性类理论，它的结构可以完全定出来。

7.2 配边理论

配边理论从直观上十分清楚。两个 k 维闭微分流形 V，W 称为配边，如果 V，W 一起构成（$n+1$）维有边缘流形的边缘。这个非常明显的概念首先是托姆在1954年的论文中提出来的。这篇划时代的论文题目是“微分流形的某些整体性质”，实际上完成了流形在配边这个等价关系下的分类，在先不考虑定向的情况下，每一维的所有流形都可以根据它们是否配边来归类，相互配边的流形算作同一类。托姆创立了配边理论，他指出任何两个流形属于同一类的充分必要条件，从而完成了流形的粗分类的工作，然后他又对每一类找出一个代表，有了这些代表，任何一个流形就属于某一个代表的类了。

在托姆之前，数学家也曾考虑类似的问题。苏联数学家庞特里亚金和罗赫林，都曾经研究过更基本的问题：什么时候一个 k 维流形是一个（$k+1$）维流形的边缘？由于同调论的关键部分是边缘算子，因此他们把这种问题称为内在同调。这样的问题显然只是配边理论的一个特殊情形，而且产生不出配边

等价类的结构，也出现不了微分流形的粗分类。从这种情形下看也可以看出托姆思想的伟大创造性。托姆的配边理论还有另外一个来源，就是一个微分流形的同调类能否被其子流形来表示。这是著名的斯廷洛德问题。托姆在他的研究中也给这个问题一个明确的回答：

可实现性定理 流形 V^n 的同调类 $Z \in H_{n-k}$ (V^n, Z_2) 能用子流形来实现的充分必要条件是存在一个映射

$$f: V^n \longrightarrow MO(k),$$

使得 $f^*(U)$成为 Z 的对偶。

这里的 $MO(k)$是以正交群 $O(k)$为结构群的万有 k 维向量丛γ 的托姆复合形，而流形 X 上一个向量空间丛 γ 的托姆复合形，就是把与 γ 相伴的 k 维闭圆盘丛 $A(r)$中把其边缘所构成的$(k-1)$维球面丛 $\dot{A}(r)$缩为一点后所成的空间，这个空间称为托姆空间，由于它有 CW 复合形的同伦型，因此称为 γ 的托姆复合形。而

$$H^n(MO(k), Z_2) \cong Z_2$$

的生成元 U 称为$MO(k)$的基本(上同调)类。

1.无定向配边理论

托姆在所有不考虑定向的流形中，引入一个等价关系，其相互配边的流形(同一维)构成一个等价类。n 维闭流形等价类全体在加法之下构成阿贝尔群 π_n，其中加法为

$$[V^n] + [W^n] = [V^n \cup W^n],$$

么元(零元)就是本身是边缘的流形，而且两流形的拓扑积可定义乘法

$$[V^m] \times [W^l] = [V^m \times W^l],$$

于是直和

$$n = \sum n_i$$

成为分次交换环(代数),称为配边环或托姆代数。

托姆的工作完整地定出配边环的结构,他证明了下列结果:

(1) **托姆基本定理**

$$n_i \cong \pi_i(MO),$$

其中 $\pi_i(MO)$表示托姆空间的稳定同伦群,即当 $n > i$ 时,

$$\pi_{n+i}(MO(n)) \cong \pi_{n+1+i}(MO(n+1))$$
$$\cong \pi_{n+k+i}(MO(n+k)), k = 2,3,4,\cdots$$

这样,当 i 一定时,与 n 无关,我们把它称为托姆谱 $MO = \{MO(n)\}$的 i 维稳定同伦群。这样求 n 的问题化为计算托姆谱的同伦群的问题。

(2) **n 的结构定理**

$$n \cong Z_2[V_2, V_4, V_5, V_6, V_8, \cdots],$$

即 n 为 Z_2 上的多项式代数,除 $k = 2^i - 1$ 外,每 k 维均有一生成元 v_k,且每 v_k 为实射影空间 RP^k 的配边类。

(3) **配边的充分必要条件** 两流形配边当且仅当其每个施蒂费尔—惠特尼示性数对应相等。

托姆对一般流形建立配边理论,对微分流形进行最粗的分类之后,流形的分类可以分两个方向进行:一是对于一般流形进行较为精细的分类,另一是沿着配边理论的方向,对更特殊类的流形做更为细致的分类。这后一方向,从托姆时起一直仿照着托姆的模式继续进行并取得重要的成就。到现在已经对 20 多种配边理论进行过研究。

2. 定向配边理论

定向配边理论的研究对象是所有定向流形的集合,其中所有流形都有两种定向。如果一种用 $+M$ 表示,另一种则用 $-$

M 表示，它们在这个集合中代表不同的元素。

两个 n 维闭流形 V^n，W^n 称为定向配边，如果存在一个（$n+1$）维可定向有边缘流形 X，使得

$$\partial X = V \cup (-W),$$

这样，所有定向流形在这种等价关系之下形成等价类。定向配边等价类的集合同样可引入加法构成阿贝尔群 Ω，引进乘法构成分次反交换代数 $\Omega = \sum \Omega_n$，称为定向配边环。

经过托姆、米尔诺（Milnor，John Willard，1931—）和沃尔的研究，Ω 的结构也完全决定。

（1）**托姆基本定理**

$$\Omega_i \cong \pi_i (MSO),$$

其中 MSO 为旋转群的托姆谱。

（2）**结构定理**　$\Omega \otimes Q$ 是 Q 上多项式环，

$$\Omega \otimes Q \cong Q [u_4, u_8, u_{12}, \cdots],$$

即每 $4m$ 维（$m \geqslant 1$）各有一个生成元，这生成元为复射影空间的定向配边类 $[CP^{2m}]$。

1960 年，米尔诺证明 Ω_k 没有 p 分量，p 为任意奇素数。同年，沃尔证明 Ω_k 的 2 分量中不含 4 阶元素。

设 T 为 Ω 中所有挠元构成的理想，则 Ω / T 为 Z 上多面式环，以 $\{[Y_{4k}] \mid k \geqslant 3\}$ 为生成元，其中 Y_{4k} 可取为复 $2k$ 维非奇异代数簇。

（3）**定向配边不变量**

两个定向闭流形定向配边当且仅当其所有的施蒂费尔—惠特尼示性数和庞特里亚金示性数对应相等。

Ω 的具体结构如下：

$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_6 = \Omega_7 = 0,$

$\Omega_4 = Z$,

$\Omega_5 = Z_2$,

$\Omega_8 = Z \oplus Z$,

$\Omega_9 = Z_2 \oplus Z_2$,

$\Omega_{10} = \Omega_{11} = Z_2$,

$n \geqslant 8$ 时，所有 Ω_n 均不等于 0。

配边理论还有复配边理论、辛配边理论等，它们各有一些结果。

8　低维流形

8.1　三维流形

由于我们所在的空间是三维的，更正确地说是三维流形，因此三维流形的拓扑分类是极为重要的问题，特别对广义相对论和宇宙学尤其如此。从庞加莱时代起，数学家自然想把二维流形的结果推广到三维，经过100多年的努力，仍然未能如愿。庞加莱的伟大猜想：任何闭的、连通的、单连通的三维流形一定同胚于三维球面 S^3，仍然没有得到证明也没有得到否定，尽管相应的高维庞加莱猜想都完全解决。三维问题比二维以及高维问题困难，其关键是三维的问题复杂而多样，可是拓扑学家的工具库中可用的工具却少得可怜，三维空间或流形中，一个或几个圆圈，可以变成极为复杂的纽结（*knot*）或环链（*link*），如果不剪开的话，你是无法把它解开成为一个圆圈的。分类纽结的问题虽然已研究了150多年，而且与物理问题有关，可是它的无限的复杂性仍然难以驾驭。另一方面，三维流形已知的拓扑不变量如同调和基本群不但没有增加，反而有许多限制，对于一个闭三维流形，由于庞加莱的对偶定理，新增加的二维同调 H_2 与一维（上）同调 H^1 完全一样，欧拉—庞加莱示性数 χ 都等于0。因此，找出新的不变量是至关重要的。近20年的突破正是在这方面打开了缺口。

1．三维流形的拓扑

三维流形的拓扑与其它维流形差别都很大，例如，一条封闭曲线 S^1 在三维空间中存在无穷多种互不合痕的嵌入，也就是打结，而到四维空间中，所有这些纽结完全可以打开成一个平面上的圆圈。这样，纽结理论成为三维拓扑学中重要的一个分支。

对于三维流形本身来讲，当然也是分为闭流形、有边缘流形和开流形三类。同二维情形一样，也是前两类研究得较为深入。下面我们也主要考虑这两类流形。

三维流形也可照可定向和不可定向来区分。首先也可以分成拓扑的、*PL*（或组合的）和可微的三个范畴，拓扑和组合范畴的关系较为简单。同一维、二维情形一样，三维拓扑流形都可以进行三角剖分成为组合流形，而且任意剖分都组合等价，也就是主猜想成立。三维拓扑流形可剖分一直到 1951 年才由莫伊斯（Moise，Edwin Evariste，1918—）证明，1959 年炳（Bing，R．H．1914—1986）给出另一个证明。

三维流形的主猜想是莫伊斯在 1952 年证明的。但是微分结构则比较复杂，三维流形总可以引进微分结构，但现在还不知三维流形甚至三维球面上有多少种不等价的微分结构。

三维流形还具有如下性质：

（1）对于三维闭流形 M，欧拉一庞加莱示性数 $\chi=0$，至于贝蒂数，对于连通复合形，

$$b_0=1,$$

$$b_3=\begin{cases}1, & M \text{ 可定向}, \\ 0, & M \text{ 不可定向},\end{cases}$$

而且当 M 可定向时，

$$b_2=b_1,$$

当 M 不可定向时，

$$b_2 = b_1 - 1, \text{ 且有 } t_2 = 2_\circ$$

因此，对于不可定向三维流形有 $b_1 > 0$，因此其一维同调群 H_1（M）为无限群，从而 π_1（M）也是无限群。

（2）可定向三维流形总是可平行化的，即有一个处处线性独立的三维切向量场。

（3）闭三维流形总是某个四维流形的边缘。

正如所有分类一样，分类三维流形也首先把它分解成比较简单的（往往称为不可约的或素的）部分，然后把每个部分列举出来，并研究透彻，这就可以完成完整的分类工作。

对于紧三维流形来说，也是先做初步分解。分解的方法有多种，最早出现的是丹麦数学家希格尔 1898 年在他的博士论文中提出来的。

希格尔分解是把三维定向闭流形分解为两个环柄体 X_1 和 X_2 的并集，环柄体是 $I^1 \times D^2$ 构成，它们有一个共同的边界曲面，然后把边界的对应点粘合起来成为整个流形。曲面的亏格称为希格尔分解的亏格。

2. 三维流形的几何分类

瑟斯顿（Thurston, William, 1946—）从 1976 年起设计一个伟大的三维流形分类方案。由于拓扑不变量的短缺，人们不得不求助于流形上的“高级”结构，然后利用这些结构不变量来作为分类三维流形的基础。

瑟斯顿的做法是：首先把三维流形分解为素流形，这种分解已知是存在的。1962 年，米尔诺又证明，对于定向流形它是唯一的。其次瑟斯顿证明每个素流形都容许局部齐性的几何。这些局部齐性的几何十分类似于曲面上容许的欧氏几何和

两种非欧几何一样。

对于二维几何学所有闭曲面属于三种二维几何学中的一种，而且只属于一种。所谓几何表示，它们上面可以具有常曲率（也就是曲率处处相等）的度量，闭曲面上面可容许的三种几何是：

（1）欧氏几何学，其常曲率为0，容许欧氏几何学的二维流形的典型代表为欧氏平面 E^2 和环面 T^2。

（2）椭圆几何学，也称黎曼式非欧几何学，其常曲率为正值，容许椭圆几何学的二维流形的典型代表为球面 S^2 与实射影平面 RP^2。

（3）双曲几何学，也称罗巴切夫斯基氏非欧几何学，其常曲率为负值，容许双曲几何学的二维流形的典型代表为双曲平面 H^2 和具有两个或两个以上的孔的环面，如 $T^2 \# T^2$，$T^2 \# T^2 \# T^2$，…。

这三种几何学可以推广到三维流形：

塞弗特—韦伯空间容许三维双曲几何学；

庞加莱十二面体空间容许三维椭圆几何学；

三维环面 T^3 容许三维欧氏几何学。

塞弗特和C·韦伯在1933年列入两种十二面体空间，一种称为庞加莱十二面体空间以纪念庞加莱，因为庞加莱在1900年曾引入所谓同调球，但他不知道这种造法，他的造法是把十二面体的6个对顶的面顺时针转$\frac{1}{10}$周后两两粘在一起，另一种称为塞弗特—韦伯空间，是把两个对顶的面顺时针转$\frac{3}{10}$周之后粘在一起构成。但三维情形就不是如此简单，例如 $S^2 \times S^1$ 具有一种齐性几何不属于上面三种几何学。

三维流形容许的局部齐性的几何比二维的 3 种要多 5 种，共有 8 种。然后瑟斯顿对于三维流形证明，如一个闭流形允许一种这种几何结构，则其上的几何结构是唯一的。因此，只要三维流形容许局部齐性的几何结构，那么分类问题原则上可以解决。

但是，三维流形与二维流形在这点上又大相径庭，许多三维闭流形不像二维流形，上面没有这种“好”的几何结构。因此，为了对于这类流形也能贯彻分类纲领，瑟斯顿提出一个几何化猜想：任何紧、可定向的三维流形可以分解成一些块，其中每一块都容许几何结构。特别是，由这个猜想可推出庞加莱猜想。这个三维流形的基本猜想对于大多数流形已得到证实，不过至今还没有完全得到证明。

三维流形的 8 种齐性几何列举如下：

(1) 椭圆几何，包括 S^3，三维实射影空间 RP^3，庞加莱十二面体空间。

(2) 欧氏几何，只有 10 种拓扑不同的欧氏三维流形，其中 6 种可定向，4 种不可定向。

(3) 双曲几何，其代表为庞加莱上半空间和塞弗特—韦伯十二面体空间。

(4) $S^2\times R^1$ 几何，这是 8 种几何学中最简单的一种，具有这种几何的闭流形只有 4 种，它们是 $S^2\times S^1$，K^3，$P^2\times S^1$，$S^2\times I/G$。开流形只有 3 种：$S^2\times R^1$ 以及 P^2 上两线丛。

(5) $H^2\times R^1$ 几何，有无穷多三维流形具有 $H^2\times R^1$ 的几何，如果有 $H^2\times R^1$ 的几何都具有自然的塞弗特纤维空间结构。

(6) $\widetilde{SL}$ (2, R) 几何，SL (2, R)（即具有行列式为 1 的 2×2 实数矩阵构成的李群）的通用覆盖群，具有 $\widetilde{SL}$ (2,

R）的几何结构也具有塞弗特纤维空间结构。

（7）Nil 几何，Nil 是具有三维幂零李群结构，即实矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

具有矩阵乘法的李群。

（8）Sol 几何，多为 S^1 上 T^2 丛。

不管如何，这个分类框架还是搭起来了。在 8 个几何结构中，7 个已有很充分的了解，也就是具有其中之一的几何结构的三维流形，可以得到完全的分类。不过对于具有双曲结构的流形，仍然还有一定的困难。

寻找新的拓扑不变量，由于 S^3 在三维流形中的特殊地位，解决庞加莱猜想的基础还是需要引进更精致的拓扑不变量。

1985 年之前，对于庞加莱同调球，主要不变量是罗赫林不变量，1985 年 A·卡松（Casson，Andrew）引入卡松不变量，1989 年，沃克把卡松不变量推广到有理同调球上。1990 年，弗洛尔（Floer，Andress，1956—1991）用瞬子引入弗洛尔不变量——8 个同调群。90 年代发现所有这些不变量都可以纳入威滕（Witten，Edward，1951—）用拓扑量子场论引入的三维流形的威滕不变量的框架，实际上它可看成是琼斯(Jones，Vaughan，1953—）不变量的推广，而且它可以通过表示论、代数、共形场论、统计力学等完全不同的方法引入。这些复杂的不变量有望使三维拓扑学取得更大的突破。

8.2 纽结理论

自古人们在生产、生活中就同纽结打交道。在数学上，我

们称嵌入在三维欧氏空间 R^3 或三维球面 S^3 中的闭曲线 S^1 为纽结。由于嵌入或安置的方式不同，而把纽结分类。纽结 K_1，K_2 称为等价，如果存在 R^3 自身上的同胚，使得 K_1 映到 K_2 上。纽结的等价类称为纽结型。

若 K_1 和 K_2 为 R^3（或 S^3）内两个纽结，如果存在同胚映射

$$H: R^3 \times I \longrightarrow R^3 \times I,$$

满足

$$H(R^3, t) = (R^3, t),$$

$$H(x, 0) = (x, 0)$$

且

$$H(K_1, 1) = H(K_2, 1),$$

则称两纽结外周合痕。两纽结外周合痕是一种等价关系，等价的纽结称为具有相同的合痕型。

莱德迈斯特（Reidemeister, Kurt, 1893—1971）发现下面三种类型的变形，保持纽结的合痕等价关系不变：

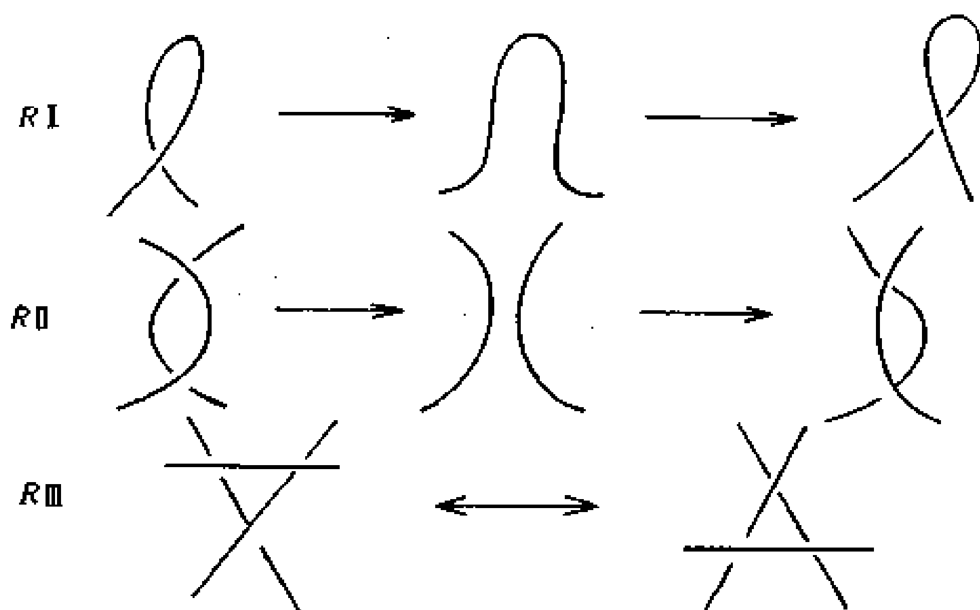


图 1

通过莱德迈斯特变形，可知 8 字结与三叶结合痕等价：

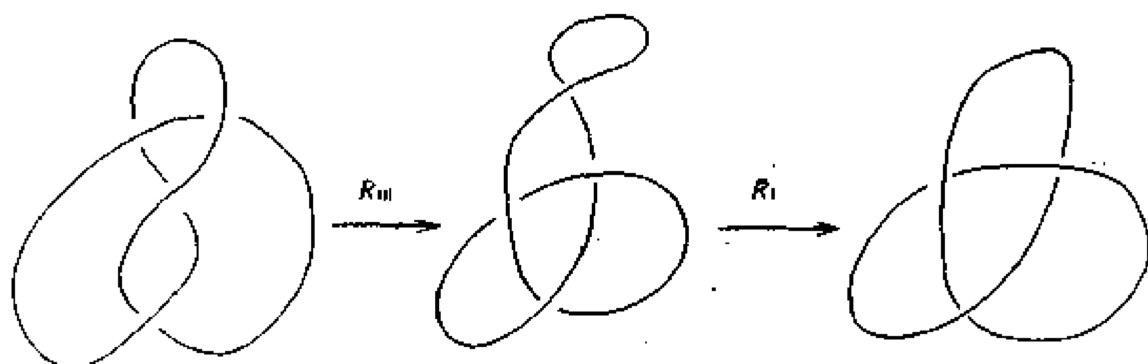


图 2

如 K_1、K_2 同合痕型，则可以通过 R^3 保持定向的同胚把 K_1 变到 K_2 或把 K_2 变到 K_1，从而 K_1，K_2 具有相同纽结型。但反过来 K_1，K_2 具有相同纽结型，未必合痕。

由于同胚不是保持定向，就是反定向，如果 K 可以通过 R^3 的反定向同胚变成自身，则称 K 是双向的（*amphicheiral*），例如 8 字型纽结是双向的，但三叶纽结不是双向的。

如果纽结 K 可用 R^3 保持定向的同胚而使 K 映到反方向的 K，则称 K 是可逆的。三叶纽结和 8 字型纽结和许多常见纽结，都是可逆的，不可逆的纽结一直到 1963 年才由特洛特（Trotter，Hale Freeman，1931—）得到。

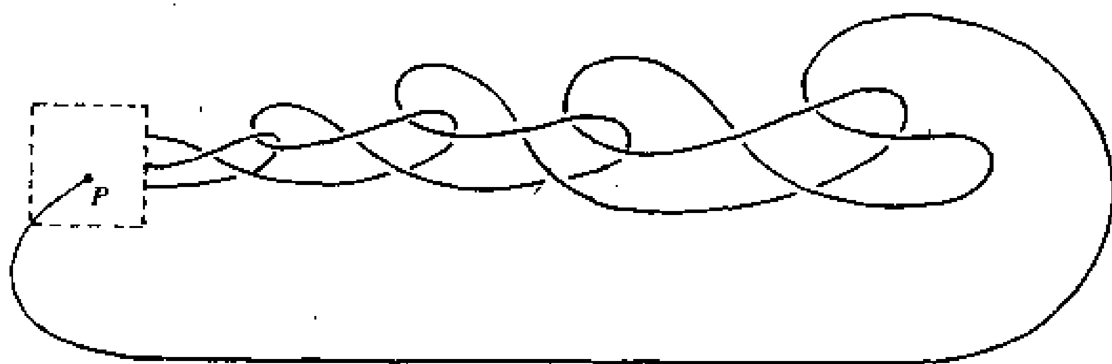


图 3

如果通过变形能把纽结变成一个平面上的圆周，则该纽结称为平凡的，也就是不打结的，否则称为打结的。显然，我们很难判断一个纽结是否打结，这样，我们必须给纽结一个规范的表示。为了不碰到复杂的情形，如野生的纽结（如图 3)。我们只考虑有限多个边的多边形来表示的纽结，称为驯服纽结。这样，我们可以考虑纽结的表示。

一个最简单的表示是取 R^3 中纽结 K 到一个平面 R^2 的投影，就像我们在图上画的那样。为了投影图比较正规，我们要求：

(1) 不要有三重点和多重点；

(2) 不要有切点；

(3) 只有有限多二重点；

(4) 顶点不是二重点。

这样，所得的纽结的平面投影图是有限多个二重点的闭曲线，在每个二重点均为交叉点，曲线通过时，可区分为上交叉点和下交叉点。沿着曲线行进时，上交叉点和下交叉点交替出现时，则称为交错纽结。

纽结理论的基本问题是：

(1) 寻找区别不同类型纽结的不变量。

(2) 分类纽结。

这个问题是极为困难的。通常分成两步走：

把纽结分解成素纽结。

两个纽结 K_1 和 K_2 各选一段弧，剪开后出现两个端点，然后把 K_1 的端点 x_1，y_1 同 K_2 的端点 x_2，y_2 联结起来，就得到一个新的纽结，称为 K_1 和 K_2 的合成，记作 $K_1 \# K_2$ (如图 4)。

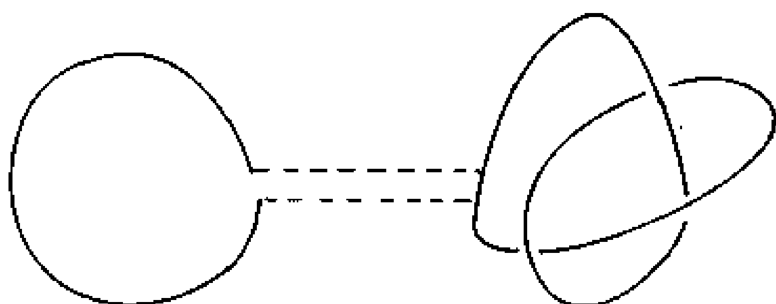


图 4

如果以这种合成法为乘法，纽结型构成一个交换半群，而且以不打结的圆周 K_0 为幺元，即

$$K_0 \# K_1 = K_1。$$

反过来，1949 年舒伯特（Schubert，H.）证明：任意的纽结型可以唯一分解为素纽结型的合成（积）。这样一来，分类纽结的问题就归结为分类素纽结型的问题。

要分类素纽结型，首先我们选定一个正则表示，它由 n 个二重点和 n 条弧构成，问题是如何由它的表示得到纽结的不变量。一般来讲，纽结 K 本身 S^1 和外围空间 R^3 和 S^3 都是很简单的拓扑空间，对于不同的纽结也是一样的，因此，它们提供不了纽结的什么信息。纽结的信息只有靠余空间 R^3-K 得到。余空间的重要的拓扑不变量是基本群 π_1（R^3-K），根据基本群的定义，在 R^3 中所有闭轨道都可缩成一点，也就是它的基本群为 O。但是，在 R^3 中挖去一个纽结以后，情况就有了变化。绕纽结一个弧的闭轨道 j，就得出基本群的一个生成元，而且每个二重点有三条弧相交叉，这三个生成元一定要满足某种关系，即

$$r_j = x_j x_k^{-1} x_{j+1} x_k$$

或

$$r_j = x_j x_k x_{j+1}^{-1} x_k^{-1}。$$

这样纽结的基本群 π_1（$R^3 - K$）——纽结群 G 就有一个表出法

$$G = \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_{n-1} \rangle,$$

称为维尔廷格表出法，这是纽结型最重要的拓扑不变量。不过它并不能完全刻画纽结。例如，1914 年德恩证明：互为镜象的三叶纽结具有相同的纽结群，但合痕型不同。对于简单的纽结，不难得出其纽结群 G：

①平凡纽结

$G \simeq Z$ 即无限循环群。

②三叶纽结

$$G = \langle x, y, z \mid x^{-1}yzy^{-1}, y^{-1}zxz^{-1} \rangle。$$

更对称的写法为

$$G = \langle x, y, z \mid x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1} \rangle,$$

把 $z = xyx^{-1}$ 代入其它两个关系中，可消掉一个生成元 z：

$$G = \langle x, y \mid x = yxyx^{-1}y^{-1}, y = xyxy^{-1}x^{-1} \rangle。$$

进一步还可以简化

$$G = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle。$$

③8 字型纽结

由维尔廷格表出法可得

$$G = \langle x, y, z, w \mid x = z^{-1}wz, y = wxw^{-1}, z = x^{-1}yx \rangle。$$

它可简化为

$$G = \langle x, y \mid yx^{-1}yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x \rangle。$$

1928 年亚历山大在纽结分类问题上取得突破，他得出纽结型不变量亚历山大多项式：

对应一个纽结的投影图，可以得到纽结群，然后经过如下

步骤，得出纽结的亚历山大多项式：

纽结群 G

$\longrightarrow$ 换位子群 G'

$\longrightarrow$ G/G'的整数群环

$\longrightarrow$ 亚历山大矩阵

$\longrightarrow$ 亚历山大多项式

亚历山大多项式 $\Delta(t)$是单变元多项式，它是纽结型不变量，除了差一个 $\pm t$ 的因子之外，由纽结型 K 唯一决定，它满足下列性质：

①$\Delta(1)=\pm 1$；

②$\Delta(\frac{1}{t})=t^{\lambda}\Delta(t)$。

反之，满足①②的整系数多项式是某个纽结的亚历山大多项式。例如，三叶纽结的亚历山大多项式为

$$\Delta(t)=1-t+t^2。$$

互为镜象的三叶纽结具有相同的纽结群，但其合痕型不同。

20 世纪 30 年代，莱德迈斯特和赛弗特也研究纽结理论，塞弗特得出塞弗特覆盖曲面和赛弗特纽结型不变量。

20 世纪 40 年代，美国数学家福克斯（Fox, Ralph, 1913—1973）发展了自由微分法，系统简化亚历山大多项式的计算。不过一直到 70 年代，英国数学家康威才得出新的不变量——康威多项式。

对于几个纽结互相连环的环结也可以用类似的方法研究。同时，E·阿廷在 1925 年发展了辫子理论，它与纽结理论有着对应关系。

纽结理论从亚历山大造出他的多项式以后，50 多年进展

不大。直到 1984 年，琼斯通过冯·诺伊曼代数造出他那著名的琼斯多项式。一两年内又推广到 HOMFLY 多项式和考夫曼（Kauffman, Louis H. 1945—）多项式以及其他多项式。1988 年瓦西里夫（Vassiliev, Victor, A.）定义远为一般的不变量包括所有这些不变量为其特例。更重要的是，琼斯多项式等不变量通过规范场理论而与许多数学和物理领域联系在一起。

1988 年，高登（Gordon, Cameron McA.）和吕凯（Luecke, John）证明纽结论中一个重要猜想：纽结 K 由它在 S^3 中的补集 S^3-K 的拓扑完全决定。

8.3 四维流形的拓扑

四维流形的问题与三维流形的情形完全不一样。100 多年来，三维流形的研究一直没有间断，但是四维流形从一开始就是空白。只有复代数曲面及复解析曲面进行过非常深入的研究，但那是在代数几何或复几何的领域中进行的。但由于拓扑结构是基础，一般四维流形上面未必有好的代数结构，甚至复结构也不一定有（S^4 就是如此），因此，没有很好的工具来研究。

四维流形的边缘可以是一个任意三维流形，且每一个有限表出群都是某个闭四维流形的基本群。由于有限表出群的字的问题，共轭问题和同构问题均算法不可解。由此，四维及四维以上流形的同胚问题是算法不可解的。同样也从四维起四维流形的组合等价及同伦等价的问题也是算法不可解的。因此，从四维起，我们必须满足于某类特殊的流形的分类问题。

四维流形同三维流形类似，有许多不同于其它维数的现象，最典型的是：

（1）四维欧氏空间 R^4 有不可数无穷多不互相微分同胚的微分结构，而其它维数 R^n 各只有一种微分结构，现在知道至少有两个连续参数来区别不同的微分结构，同样 R^4 也有不可数不同的 PL 结构。

（2）对于一般四维流形，不是不存在 PL 结构和微分结构，就是有许多 PL 结构以及微分结构。

这些反映出四维拓扑流形和四维微分流形有所不同，最简单的情形首先是单连通四维流形，这些大都是在 1981 年四维流形取得突破之前的仅有结果。

关于四维单连通定向闭流形的分类结果，第一个是 J·H·C·怀特海的定理。

定理　四维单连通定向闭流形的保持定向的同伦等价类由其交截形式的等价类决定。

这样问题集中在交截形式上。

若 M 为 $4k$ 维定向闭流形，V 为 H^{2k}（M，Z）的非挠元部分，在 V 上可以定义一个对称双线性型 $\langle x, y\rangle$ 称为其交截形式

$$\langle x, y\rangle = (x \cup y)[M],$$

其中 $x, y \in V$，$[M] \in H_{4k}(M, Z)$是 M 的定向类。双线性型在 V 上定义一个内积，由庞加莱对偶定理，这双线性型是么模的。

对于 V 上对称双线性型 μ，有如下的不变量：

① V 的秩，记作 $\mathrm{rank}\,V$，其定义为

$$\mathrm{rank}\,V = \dim(V \otimes R)。$$

② V 的符号差（*signature*），也称指数，记作 $\mathrm{sign}\,V$，

$$\mathrm{sign}\,V = \mathrm{rank}\,V - 2q,$$

q 是 $V\otimes R$ 的最大的使 μ 为负定的子空间的维数。

③μ 的型和 V 的型。

μ 称为型Ⅱ，如对于所有 $v\in V$，

$$\mu(V,V)\equiv 0(\bmod 2),$$

否则称 μ 为型Ⅰ。按照 μ 的型为Ⅰ和Ⅱ，称 V 为型Ⅰ和Ⅱ。

型Ⅱ的内积空间 V，其符号差为 8 的倍数。

秩、符号差和型是整数幺模双线性型的全组不变量，对于确定型分类比较困难，但不定型容易。

分类定理 对于 Z 上内积空间 V 上不定内积 μ，若 μ 为Ⅰ型，则

$$\mu=\underbrace{\langle 1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle 1\rangle}_{l}\underbrace{\oplus\langle -1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle -1\rangle}_{m},$$

其中$\langle 1\rangle$和$\langle -1\rangle$都是秩为 1 的形式，$\langle 1\rangle$可以用某个 CP^2 为代表，则$\langle -1\rangle$以反定向 CP^2（记作 $\overline{CP^2}$）为代表，它们的第二上同调群均为Ⅱ。而具有 l 个$\langle 1\rangle$和 m 个$\langle -1\rangle$的交截形式，则由 $lCP^2\# m\,\overline{CP^2}$ 为代表，其中#表示连通和。

若 μ 为Ⅱ型，则

$$\mu\cong H\oplus\cdots\oplus H\oplus E_8\oplus\cdots\oplus E_8,$$

其中

$$H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad E_8=\begin{pmatrix}2&1&&&&&&\\1&2&1&&&&&\\0&1&2&1&&&&\\0&0&1&2&1&&&\\&&&1&2&1&1&0\\&&&&1&2&0&\\&&&&1&0&2&1\\&&&&&0&1&2\end{pmatrix},$$

其中 H 至少出现 1 次。

具有交截形式 H 的四维流形可以 $S^2 \times S^2$ 为代表。

由怀特海定理，自然可问两个问题：

①存在性问题：哪些对称双线性型能够成为一个闭单连通四维流形的交截形式？

②唯一性问题：有多少不等价流形具有同一个交截形式？

由于流形可以属于拓扑范畴或微分范畴，它们的结果不同，方法也不一样。

1981 年，弗里德曼（Freedman，Michael，1951—）取得突破，实际上他完成单连通四维拓扑流形的完全分类。

单连通四维拓扑流形的分类定理 任何幺模对称双线性型均为某个闭、定向、单连通四维流形的交截形式。在型 Ⅱ 情形，流形唯一到同胚，即交截形式唯一决定流形同胚型。在型 Ⅰ 情形，只有两个不等价的同胚型对应同一交截形式。

同时，弗里德曼证明：

四维拓扑流形的庞加莱猜想 四维拓扑流形如果具有和四维球面 S^4 同样的同伦型，则它与 S^4 同胚。

表面上，微分流形包含在拓扑流形的范畴之中，但是，它们的微分同胚不变量是更为细致的不变量，单是拓扑的结果并不能解决问题。

1982 年，唐纳森（Donaldson，Simon，1957—）以令人吃惊的方式由规范场理论定义了唐纳森不变量，这是一个微分结构的不变量，用它推出许多奇特的结果。在许多四维流形上存在奇怪的微分结构，例如四维射影空间。

在此之前，对于四维微分流形，只知道下面的定理：

罗赫林定理 如 M 是闭定向单连通四维微分流形，具有

Ⅱ型交截形式 μ，则 μ 的符号差

$$\mathrm{sign}(\mu)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 16)。$$

这样，就可以定义Ⅱ型么模形式 μ 的罗赫林不变量 $\rho(\mu)$ 为

$$\rho(\mu)=\frac{1}{8}\mathrm{sign}(\mu)(\mathrm{mod}2)。$$

因此，若 μ 的罗赫林不变量不等于 0，也就是该交截形式的符号差

$$\mathrm{sign}(\mu)\equiv 8(\mathrm{mod}\ 16),$$

则它不能实现为闭、定向、单连通、四维光滑流形的交截形式，但它确实可实现为闭、定向、单连通、四维拓扑流形的交截形式（例如 E_8），这样一来，它们不具有微分结构。

在 1982 年之前，对于四维微分流形，其它情形不太清楚，特别是对于正定形式，分类很难，对它们有和不定形式一样的问题。有趣的是，唐纳森的下述定理，把这个困难绕过去：

唐纳森定理 若 M 是光滑、闭、定向、单连通四维流形，具有正定交截形式 μ，则 μ 等价于标准的对角形式。

这样一来，相当多的四维拓扑流形上不存在微分结构。

9 范畴与函子

范畴和函子是现代数学中一种重要的形式语言与理论框架，它们来源于结构但高于结构，从某种意义上来讲，也许可讲范畴论是结构数学的元数学。

比起结构来，范畴是一个更复杂的对象。结构的基础是对象的集合，而范畴的基础不仅有对象的集合，而且还有对象间映射的集合。这两套集合不能混在一起，因此，从一开始，范畴就不同于结构。

9.1 范畴

范畴 范畴$\mathscr{C}$包含下列组分：

(1) 一个对象的集体，记作 Ob ($\mathscr{C}$)，其中元素称为 C 的对象。

(2) 一个对象间映射的集体，记作 Mor ($\mathscr{C}$)，其中元素称为 C 中的态射（*Morphism*）。

(3) 对于任意 A，$B \in Ob$ ($\mathscr{C}$)，都存在一集体 Hom (A, B) $\subset Mor$ ($\mathscr{C}$)，它由从 A 到 B 的态射构成，记作 $f: A \longrightarrow B$，A 称为态射的始对象，B 称为终对象。态射也称为矢（*arrow*），A 称为定义域（*domain*），B 称为值域为上定义域（*codomain*）。

(4) 对于任意 A，B，$C \in Ob$（$\mathscr{C}$），以及 $f \in Hom$（A，B），$g \in Hom$（B，C），都存在 $h \in Hom$（A，C），称为 f，g 的合成，记作 gf。

(5) 对任何 $A \in Ob(\mathscr{C})$，存在态射 $1_A \in Hom(A, A)$，称为恒同态射。

上述组分满足下列条件：

(1)（结合律）对任何 $f \in Hom(A, B)$，$g \in Hom(B, C)$，$h \in Hom(C, D)$，

$$h(gf) = (hg)f。$$

(2)（幺元律）对任何 $f \in Hom(A, B)$，

$$f1_A = 1_B f = f。$$

注意，这些看起来有些像定义群的公理，可是这些 f，g，h 只有首尾相接时才有定义，而不是对于所有 f，g，$h \in Mor$（$\mathscr{C}$）都有定义。

由结构不难产生出我们常用的范畴，但是我们一般不考虑所有的集合之类的对象集，以避免逻辑上的矛盾。实际上也可以把 Ob（$\mathscr{C}$）看成集类。

(1) 集合范畴（*Ens*），其对象为任意集合，其态射为集合间的映射，其合成为通常映射的合成。

(2) 群范畴（*Gr*），其对象为群，其态射为群的同态，其态射的合成为同态的乘积。

(3) 向量空间范畴（*Vect*），其对象为一域 K 上向量空间，其态射为线性映射，态射的合成为线性映射的乘积。

对于所有结构，我们有下列的“小”范畴，也就是不是所有对象的集合：

(4) 阿贝尔群范畴（*Ab*）。

(5) 环范畴（*Ring*）。

(6) 交换环范畴（*CRing*）。

(7) 左模范畴（$R-Mod$），对象为环 R 上左模，态射为线性映射。

(8) 右模范畴（$Mod-R$）。

(9) 拓扑空间范畴（*Top*），对象为拓扑空间，态射为连续映射。

(10) 带基点拓扑空间范畴（$Top*$），对象为带基点拓扑空间，态射为保持基点的连续映射。

(11) 同伦范畴（*Toph*），对象为拓扑空间，态射为连续映射的同伦类。

以上都是通过结构定义的范畴，但是还有许多范畴不一定从结构中来。

1．离散范畴

范畴不一定是集合的集体，可以就是集合本身。这样，Ob（$\mathscr{C}$）就是集合的元素，而 Mor（$\mathscr{C}$）就是两个元素之间某种关系，例如前序（*preorder*）。离散范畴 P，它的元素是一个集合中的元素，它的态射是元素间的一个二元关系：

如果 P，$P'\in Ob$（p），则 P，P'之间至多有一个态射 $p\longrightarrow p'$，即某些元素之间有一个二元关系≤；

如果 $p\leqslant p'$，则存在态射 $p\longrightarrow p'$；

如果 p 与 p'不满足上面关系，则不存在态射 $p\longrightarrow p'$。显然，这样定义的二元关系满足自反律（即对任何元素 p，$p\leqslant p$）和可递律（即 $p\leqslant p'$，$p'\leqslant p''$，则 $p\leqslant p''$）。

显然，在具有前序结构的集合上可以定义一个前序范畴，反之一个前序范畴也可以定义一个前序结构，满足自反律和可

递律。

同样，对于偏序集合（即前序集合，满足附加条件：由 $p \leqslant p'$ 和 $p' \leqslant p$ 可推出 $p = p'$）和全序集合（即偏序集合，满足条件：对于给定 p 和 p'，或者 $p \leqslant p'$ 或者 $p' \leqslant p$），它们也可以做成离散范畴。

按照上面的造法，每一个有限序数 n，可以看成是一个由前面的 n 个序数构成的全序集合 $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$，同样也可以看成离散范畴 $\underline{n}$。同样第一个无穷序数 $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 也可看成一个范畴，它的态射包括：

(1) $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$

(2) 上述矢（态射）的所有合成。

(3) 每个对象的恒同映射 $n \to n$。

通过序数，我们可以得到不同的范畴。

2．单形范畴

由于序数 n 可以看成集合 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$，也可以看成范畴，我们可以在同样的对象集合上造出不同的范畴。

单形范畴 Δ 是由所有有限序数为对象的范畴。

Ob（Δ）：0，1，2，…

Mor（Δ）：所有保序映射 f：$m \to n$。

所谓保序映射，即把 $m \to n$ 看成集合间

$$(0, 1, \cdots, m) \to (0, 1, \cdots, n)$$

的映射，使得如在 m 中，$i \leqslant j$，则在 n 中，$f(i) \leqslant f(j)$。这个单形范畴极为有用。

3．有限集合范畴 $Set\omega$

同样由所有有限序数为对象还可以造出完全不同的范畴。当然，对象集体还是一样的，不同的只是态射包含哪些。如果

我们规定态射可以是由 m 到 n 的所有映射，就可以得到完全不同的范畴——有限集合范畴 $Setw$。因为它实际上是所有有限集合构成的范畴，即对每个有限基数 n，只用一个有限集合。

4．衍生范畴

（1）对偶范畴。对于每个范畴 $\mathscr{C}$，可定义其对偶范畴 $\mathscr{C}^*$，即

$$Ob(\mathscr{C}^*)=Ob(\mathscr{C}),$$

$H(A,B)$于 $\mathscr{C}^*$ 由 $\mathscr{C}$ 中 $Hom(B,A)$定义。定义 $\mathscr{C}^*$ 中合成 $f\circ g=g\circ f$（$\mathscr{C}$ 中合成）。

（2）子范畴。范畴 $\mathscr{D}$ 称为范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴，如果 $Ol(\mathscr{D})\subset Ol(\mathscr{C})$，$Mor(\mathscr{D})\subset Mor(\mathscr{C})$，且它们本身也满足范畴的定义条件。

（3）商范畴。由 $\mathscr{C}$ 中对象出发的满态射进行分类可得商范畴。

（4）直积与直和。

对于范畴中的对象 X_1，X_2，可以造直积 $X_1\times X_2$，再加上投影映射

$$P_i:X_1\times X_2\longrightarrow X_i,$$

它们满足：对于任意态射

$$f_i:X\longrightarrow X_i,$$

使 $P_i\circ f=f_i$ 的态射

$$f:x\longrightarrow P$$

存在且唯一。直积的对偶称为直和。

许多范畴中，不一定存在直积和直和，但如果存在，则它们是唯一的。集合、群、环、拓扑空间等范畴中的直积与它们

的直积概念一致。直和概念在有限群范畴中不存在，但在所有群的范畴中存在。其中直和就是自由积，直积就是群的直积。在模的范畴中，直和和直积都同模的直和一致。在交换环的范畴中，直和即张量积，直积即环的直和。在拓扑空间的范畴中，直和和直积与拓扑空间的相应运算一致。但对于有基点的拓扑空间的范畴中，（X，x_0）与（Y，y_0）的直积是（$X\times Y$，$x_0\times y_0$），而它们的直和则是把 X 和 Y 通过把 x_0 和 y_0 粘在一起而得到的 $X\vee Y$。

9.2 函子

范畴论中最重要的概念是函子，单独范畴并没有什么特别之处，但是函子却反映范畴之间的对应关系，也是范畴论的实质内容所在。函子（*functor*）从名称上来看，就可以知道它是两范畴之间的映射，因此，定义函子，就要定义其所有组分映到何处。

函子有两类：协变函子和逆变函子。

协变函子：由范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 的协变函子由两个映射(用同一字母表示）F 构成：

$$F:Ob(\mathscr{C})\longrightarrow Ob(\mathscr{D}),$$

$$F:H(A,B)\longrightarrow H(F(A),F(B))。$$

对所有 $A,B\in Ob(\mathscr{C})$，满足下列条件：

(1)对于 $A\in Ob(\mathscr{C})$，$F(1_A)=1_{F(A)}$；

(2)对于 $\mathscr{C}$ 中有定义的合成

$$F(fg)=F(f)F(g)。$$

逆变函子：由范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 的逆变函子，也由两个映射 F 构成：

$$F: Ob(\mathscr{C}) \longrightarrow Ob(\mathscr{D}),$$

$$F: H(A,B) \longrightarrow H(F(B),F(A)),$$

满足下列条件：

①$F(1_A)=1_{F(A)}$；

②$F(fg)=F(g)F(f)$。

大多数拓扑不变量是由拓扑空间范畴到群或阿贝尔群范畴的函子。

基本群：具有基点的拓扑空间范畴到群范畴的协变函子。

n 次同伦群（$n \geqslant 2$）：具有基点的拓扑空间范畴到阿贝尔群范畴的协变函子。

同调群：由拓扑空间范畴到阿贝尔群范畴的协变函子。

上同调群：由拓扑空间范畴到阿贝尔群范畴的逆变函子。

在数学中，最常用的是两个二元函子 Hom 和$\otimes$。对于任意范畴 $\mathscr{C}$，若 $A, B \in Ob(\mathscr{C})$，$Hom(A,B)$是一个集合，对于

$$\alpha: A \longrightarrow A'$$

$$\beta: B \longrightarrow B'$$

是态射，则定义

$$Hom(\alpha,\beta): Hom(A',B) \longrightarrow Hom(A,B')$$

为

$$Hom(\alpha,\beta)r=\beta r\alpha, \text{对 } r \in Hom(A',B)。$$

不难看出，Hom 这个二元函子对于第一个变元是逆变的，而对第二个变元是协变的。

张量积$\otimes$也是二元函子，但对两个变元都是协变的。

10　同调代数学

数学的学科分类大致有两个方向：一类是按照数学研究对象的不同来分，如几何学、数论、群论等；另一类是按照方法的不同来分，如综合几何学、解析几何学、微分几何学、解析数论等等。同调代数学应该说是后者。现代的代数学，也称抽象代数学，研究的对象是代数结构，典型的是群、环、代数、域以及各种复合及衍生的结构，目标是加以刻画及分类。抽象代数学的方法大都是由公理出发，通过纯逻辑的步骤加以研究，并取得非常辉煌的成就。例如，半单李代数结构的确定和有限单群分类的完成。

同调代数学的对象和目标与抽象代数学的完全一样，不同的只是引入了同调方法，更确切地说是代数拓扑学的方法。代数拓扑学通过同调函子，把拓扑空间范畴对应于交换群范畴，从而得出拓扑空间的一系列拓扑不变量。通过这些拓扑不变量，我们可以刻画和分类不同的拓扑空间。现在，我们把拓扑空间的范畴换成代数结构的范畴，例如群、结合代数、李代数等等，就得出这些代数结构的同调不变量。它们对于代数结构的刻画与分类有时要比抽象代数学方法有效得多，这是由于在许多情形下，它们可以计算，也能够定量，而且往往有许多情形是抽象代数学方法根本无法做到的，这就是同调代数学的威

力所在。

不过，同调代数学作为一套概念及方法体系，相当复杂及枯燥，只有专家能熟练地运用它们，这里只是概述最基本的概念及结果，并且简述其历史。

10.1 模

同调代数所处理的主要对象是模。模与阿贝尔群差别不大，模是带有算子区的阿贝尔群，而阿贝尔群是不带算子区的模。为简单起见，我们只考虑算子区是环 R，为了明确起见，也称 R 模。

所谓带算子区 R 的模 M，就是 M 具有阿贝尔群结构且存在映射

$$R\times M\longrightarrow M$$

称为 R 到 M 上的运算或作用，使得

$$(a,x)\longmapsto ax, a\in R, x\in M,$$

满足下列条件：

(1) $a(x+y)=ax+ay, a\in R, x,y\in M$;

(2) $(a+b)x=ax+bx, a,b\in R$;

(3) $(ab)x=a(bx)$;

(4)如 R 有么元 1，则 $1x=x, \forall x\in M$。

上述的模称为左 R 模。相应也可有右 R 模。

同调代数学中的模，可分为自由模、投射模、内射模、平坦模等。下面我们讲的所有模一般都是 R 模。

1. 自由模

左 R 模 M 称为自由模，如果 $M=\coprod Rx_i$，$Rx_i\simeq R$。其中 $\coprod$ 表示直和。所谓直和，即存在一个基 $\{x_i\}$，使每元素 x

$\in M$，可唯一表为

$$x = \sum a_i x_i,$$

其中 $a_i \in R$，而且几乎所有 $a_i = 0$。

实际上给定一个集合 X，都存在自由模 F 以 X 为基。任何模 M 都是自由模的商模。

自由模具有如下性质：如 F 为自由模，α 为任何映射，β 为满映射，则存在

$$r: F \longrightarrow B,$$

使得

$$\alpha = \beta r,$$

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{r}{\longleftarrow} & F & & \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ B & \underset{\beta}{\longrightarrow} & C & \longrightarrow & O \end{array}$$

若 F 是自由模，则函子 *Hom*（F，$*$）是正合函子。

2．投射模

任何模 P 具有自由 F 模，上面两条性质即

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{r}{\longleftarrow} & P & & \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ B & \overset{\beta}{\longrightarrow} & C & \longrightarrow & O \end{array}$$

且 *Hom*（P，$*$）是正合函子。投射模不同于自由模，但一模是投射模，当且仅当它是自由模的直和因子。

但投射模一般不是自由模，例如取

$$R = Z/6Z = Z/2Z \oplus Z/3Z,$$

因此 R 模 $Z/2Z$ 是直和因子，所以是投射模，但它不自由，因任何自由 R 模至少有 6 个元素。

虽然投射模 P 一般不一定自由，但一定存在一个投射模

Q，使 $P \oplus Q$ 是自由模，Q 称为 P 的自由补模。如 P 是有限生成的，则 Q 也是有限生成的。

模 P 是射影模当且仅当任何正合序列

$$O \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow O$$

分裂。

3. 内射模

内射模是投射模的对偶。具体地讲，E 称为内射模，如对于任何模 B 及其任何子模 A，任何

$$f: A \longrightarrow E,$$

可扩张成一映射

$$g: B \longrightarrow E,$$

即下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} & & E & \xleftarrow{\ g\ } & \\ & & \uparrow f & & \\ O & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

一模为内射模当且仅当函子 Hom（$*$，E）是正合的。

10.2 导出函子

同调代数学的目标就是通过代数对象，如群、环、结合代数、李代数等的同调或上同调函子来研究其代数结构。自然，首要问题是造出它们的同调或上同调。同调、上同调的造法我们有章可循，那就是代数拓扑学。根据奇异同调及上同调的公理系统，我们要造拓扑空间的同调群或上同调群，只需造一个复合形，满足

$$d \cdot d = 0。$$

现在只需把拓扑空间换成群或代数。为了统一起见，换成左 R 模或右 R 模。

R 模 M 的序列 (M_i, d_i)

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} M_{-1} \longrightarrow \cdots$$

称为复合形，如对每 n，

$$d_n \cdot d_{n+1} = 0。$$

显然这意味着

$$Imd_{n+1} \subset Kerd_n,$$

因此，可以定义同调群

$$H_n(M) = \frac{Kerd_n}{Imd_{n+1}}。$$

因此，要定义同调群，就要找一个合适的复合形。

投射解列(*resolution*) R 模的复合形(P_i, d_i)称为投射解列，如果

(1)每一个 P_i 均为射影模；

(2)如 $n<0$，则 $P_i=0$；

(3)对所有 $i \neq 0$，$H_i(P)=0$；

(4)$H_0(P) \sim M$。

实际上，M 的投射解列就是正合序列

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0。$$

通过对偶可定义 M 的内射解列，也就是

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \longrightarrow \cdots$$

有了投射解列和内射解列之后，我们可在上作用函子 F。如果 F 是协变函子，则可产生一个复合形，它的同调群 L_nF 称为 F 的左导出函子。如果 F 是逆变函子，作用在内射解列上，

则可产生另一个复合形，它的上同调群称为右导出函子。常用的函子一个是张量积，一个是 Hom，它们的导出函子在数学中有广泛的用途，并有如下特殊的记号：

$$L_n(A\otimes_R B)=Tor_n^R(A,B);$$

$$R^nHom_R(A,B)=Ext_R^n(A,B)。$$

为了具体起见，不妨考虑群 G 的上同调。设 G 为群，ZG 为整数群环。设 A 为左 ZG 模，B 为右 ZG 模，则

$$H^n(G,A)=Ext_{ZG}^n(Z,A);$$

$$H_n(G,B)=Tor_n^{ZG}(B,Z)。$$

在计算群的上同调群时，靠上面的定义是不行的，现在已可以用具体的造法造出群 G 的上同调群。

在没有同调的语言时，对特殊的群的上同调已有充分的研究。低维的同调群都有群论的解释，特别是 H^2（G，A）的元素是 A 借助于 G 的扩张的类。

群的一个重要不变量是上同调维数，它也就是存在 A，使 H^n（G，A）$\neq 0$ 的 n 的最大值。数论和代数的许多重要定理都可以通过群（或环、代数等）的上同调和群的上同调维数表出。这也是为什么同调代数继抽象代数的结构研究之后，成为代数学的重要工具。

第四篇　几何学与数论

在概述结构数学的基本概念之后，这一部分我们希望展示一下结构数学的威力。任何数学，包括结构数学有独立存在的意义和价值，并不在于搬进一大套让人莫名其妙的名词术语，提出一套不知深浅的理论，而在于它提供理解数学及其它科学的框架，创造联系各学科的纽带，提出解决经典问题的方法。只有这样，才能显示它不是一堆毫无用处的奇谈怪论。当然，结构数学从一出现，就产生大量本学科的问题。更重要的是，它的确能解决用经典方法解决不了的经典问题。单是这点已足以显示其优越性。但更重要的是，它成为引导我们进一步统一数学、发展数学的指路明灯，因为未来的数学发展主要不再是靠解几个孤立的经典难题来推动，而是系统地发展理论，提出各种层次的问题并求得其解决，并在解决的过程中加深对整个数学的理解。这样数学将成为越来越宏伟、越统一的建筑。

数学的原始对象是数量与形，这是数学永恒的主题。结构数学的发展虽然大大扩展了数学对象的范围，但归根结底，仍要对数量与形的研究有所推动。同时结构数学的研究必将扩大经典数学的领域，使整个数学走向无尽的前沿。

结构数学形成之后，特别是代数拓扑学为微分几何学的大范围研究奠定了基础，在几何结构的基础上又形成了大范围分析。另一方面，传统的几何对象代数簇也在复流形的范畴下得到空前的发展，并深入到复分析的领域。代数簇的离散部分导向算术代数几何这一把数与形联系在一起的方向。由此产生的硕果累累，而且从根本上改变了数论的面貌。而原来的代数数论经过结构数学的洗礼，几经变形，成为数学中无比辉煌的大厦。

1　微分流形的几何学

1.1　微分流形

经典的几何学研究三维空间中的图形，一方面是直线形如多面体，另一方面是曲线和曲面。通过结构数学的发展，形的概念扩张成一般的空间乃至极为病态的点集，例如康托尔集和科赫（Koch，Helgevon，1870—1924）曲线。很长时期以来，这些被认为是无聊的数学游戏，可是近 20 年，它们成为当今热门——分形浑沌理论的基础。

可是几何学主要还是研究比较光滑的曲线和曲面，而这些对象自然发展成为当代几何学的中心对象——微分流形。

微分流形是拓扑空间更是点集，但是我们不宜把太一般的对象作为我们研究的主要目标，因为它们过于一般，得不出多少实质性的结果，同时也缺少处理它们的有效方法，从而使学科趑趄不前。另一方面，数学也不宜研究太具体太琐细的对象，例如初等几何学的三角形和圆，它们缺少普遍意义和示范作用。而微分流形正如所有有前途的数学对象一样，正好介乎其中，是极为合适的研究对象。同时，由于它局部是欧氏空间（R^n 中的开集），我们有成熟的分析工具，能进行深入而具体的演算，这有利于得出深刻的结果。

既然微分流形是适中的研究对象，但还有许多数学中常见

的更为宽泛的对象。其中包括：

（1）拓扑流形和组合流形。拓扑流形与微分流形的关系正如连续曲线（函数、映射）与光滑曲线的关系一样。19 世纪的数学分析一个重要结果就是证明存在处处连续而处处不可微的连续函数。相应地我们可以证明存在拓扑流形，其上不存在任何微分结构。对于组合流形，也存在许多不可光滑化的流形。这些没有微分结构的拓扑流形和组合流形是微分流形的推广。但是，它们失去了内容丰富的几何学和分析。

（2）庞加莱复合形，这是一种 *CW* 复合形，它满足庞加莱对偶定理。它不一定有流形的结构，因此更为一般。W·布劳德（Browder, William, 1934—）和赫尔希（Hirsch, Morris William, 1933—）得出单连通庞加莱复合形具有闭分段线性流形的同伦型的充分必要条件。

（3）代数簇和解析簇。连续曲线有两种情形不可微：一种是处处不可微，另一种是局部不可微，也就是存在奇点。由多项式方程或方程组的零点所定义的代数簇就存在后面的情形。

代数簇和它的各种推广与微分流形的另一差别在于微分流形局部维数都相同（有边缘流形的边缘维数差 1），而代数簇包含许多退化情形，也就是可能有更低维流形。

在 20 世纪 50 年代，惠特尼提出研究簇的结构的新方法。他把簇分解为流形，建立惠特尼层化（*stratification*）的概念，这是微分流形概念的重要推广。1969 年，托姆更进一步推广成分层集的概念。这些概念在奇点的局部研究和大范围研究中起重要作用。例如任何半解析集都允许惠特尼层化。

类似用多项式方程组来定义代数簇，我们可以用解析函数方程组和不等式组来定义解析簇和半解析集，它们具有更为复

杂的结构。

1.2 微分流形的基础结构

任何微分流形都有基础的拓扑流形结构和分段线性结构（或组合结构）。反过来，许多拓扑流形在容许微分结构的问题上有三种情况：

（1）不容许任何微分结构。这种例子首先是由克外尔（Kervaire，Michel Andre，1927—）在1959年得出的。

（2）容许唯一的微分结构。R^n（$n\neq4$）以及任何一维、二维、三维拓扑流形都容许唯一的微分结构。

（3）容许多种不等价的微分结构。首先是1956年米尔诺得出 S^7 上容许不同的微分结构，其后他证明共有28种。1963年米尔诺和克外尔证明 S^n 上的微分结构构成微分结构群 θ_n，它是一个有限阿贝尔群（$n\neq3$），他们基本上定出 θ_n 的结构，特别当 $n<7$（$n\neq3$）时，$\theta_n=0$。

四维欧氏空间 R^4 容许不可数多不等价的微分结构。

任何微分流形都存在三角剖分，而且三角剖分所得的分段线性结构是唯一的。反过来，任何分段线性流形是否容许相容的微分结构呢？这个问题称为可光滑化问题，所得结果与拓扑流形相差不多，但不完全相同。组合流形容许微分结构的问题也分三种情形：

（1）不容许微分结构。存在八维及八维以上的组合流形，不存在微分结构。现在已得出存在微分结构的充分必要条件（见后）。

（2）容许唯一的微分结构。七维及七维以下的组合流形都存在微分结构，但不一定唯一。组合球面均可光滑化，n 维组

合球面上的微分结构构成有限阿贝尔群 Γ_n。在 $n \neq 3$，4 时，已经证明

$$\Gamma_n \simeq \theta_n,$$

而且 $\Gamma_3 = 0$，1958 年法国数学家塞尔弗（Cerf，Jean，1928—）证明 $\Gamma_4 = 0$。由此可知，组合球面 S^n（$n \leqslant 6$）只有唯一的微分结构。

（3）容许多种不等价的微分结构。七维以上组合球面大都具有不等价的微分结构。

为了得到分段线性流形具有微分结构的条件，米尔诺于 1964 年引入微丛的概念，它对于拓扑流形和分段线性流形相当于微分流形上的切丛。并由此得出分段线性流形 M 具有相容的光滑结构的充分必要条件是在属于一列群 $H^k(M; \Gamma_{k-1})$ 中的每个阻碍均为 0。

1.3 微分流形的上层结构

微分流形由于大量可微函数的存在，在其上可以允许许多附加的结构，这种结构对于进一步研究微分流形有很多的好处。微分流形上的高级结构大致可分为下列三类。

1. 切丛结构

微分流形 M^n 上最基本的结构是向量丛，而向量丛中最重要的是切向量丛，或切平面丛，简称切丛。一般切丛的结构群是一般线性群 $GL(n,R)$ 或者正交群 $O(n)$。一旦结构群可以约化为一个 $GL(n,R)$ 或 $O(n)$ 的特定子群时，那么我们说，流形 M^n 上具有某个群的结构，这种子群有：

转动群　$SO(n) \subset O(n)$；

酉群　$U(n) \subset O(2n)$；

特殊酉群 $SU(n)\subset O(2n)$；

紧辛群　$Sp(n)\subset O(4n)$。

其中转动群导致流形 M^n 具有定向结构，酉群导致流形上具有近复结构，而具有复结构和辛结构的流形都必定具有基础的近复结构。另外一个重要的结构是旋结构，相应的结构群也就是 $SO(n)$的二重覆盖群，旋子群 $Spin(n)$。最后还有群可约化为一个元素么元，这时流形则是可平行的。

这些结构的存在自然需要一些条件来保证，这些往往是切丛的示性类需要满足的，例如：

——M^n 可定向当且仅当 $W_1(M)=0$。

——M^n 具有近复结构的必要条件是：

①n 是偶数；

②M^n 可定向；

③M^n 的所有奇维施蒂费尔—惠特尼示性类均为 0。

——M^n 具有旋结构当且仅当 $W_1(M^n)=W_2(M^n)=0$。

——M^n 可平行化仅当全施蒂费尔—惠特尼示性类 $W(M)=1$。

施蒂费尔证明，实射影空间 RP^n 的 $W(RP^n)=1$ 当且仅当 $n=2^m-1$。因此，可能平行化的 RP^n 只有 $P^1, P^3, P^7, P^{15}, P^{31}, \cdots$。但到 1958 年才确认真正可平行的 RP^n 只有 RP^1, RP^3 和 RP^7，而高维的 RP^n 不可平行。

2．向量场和张量场

流形 M^n 上向量场是数学中常见的概念。用向量丛的语言来讲，它不过是 M^n 上向量丛的截面。所谓底空间 M^n 上向量丛 $\{E, p, B, F\}$ 的截面是连续函数

$s: B\rightarrow E$，

使得

$$b \to s(b) \in F_b,$$

其中 F_b 是 b 处的纤维。通常讲的向量场一般是指切向量场，同样可以定义平面丛和平面场。这样，向量场的存在问题实际上是纤维丛的截面存在问题，而截面存在的阻碍类实际上就是各种示性类。

在历史上从数量到向量，从向量到张量都颇费周折，而有向量的概念后，向量场概念比较直观，张量场则不直观。不过用纤维丛的语言，张量场也不难理解，通常我们还是对微分流形的切丛来考虑，不过对一般向量丛也适用。对于 M^n 上每一点 P，都对应一个切空间 $T(P)$，M^n 的切丛 $T(M)$ 也就是这些切空间的集合。切空间既然是一个向量空间，则它有一个对偶向量空间 $T^*(P)$，称为在 P 点的余切空间。由余切空间构成的向量丛称为余切丛 $T^*(M)$。向量丛有张量积⊗，其张量积也是 M^n 上的向量丛。如果由 r 个 $T(M)$ 和 s 个 $T^*(M)$ 通过张量积构成的丛，不妨称为 (r, s) 型张量丛。(r, s) 型张量丛的截面则称为 M^n 上的 (r, s) 型张量场。这里 (r, s) 表示张量场 r 阶逆变，s 阶协变。

张量场如果对于指标的置换保持不变，则称为对称张量场。如果对于奇置换，张量前加上负号，则称反对称或斜对称张量场。

许多几何结构是以张量形式出现的。例如黎曼度量就是正定非退化 2 阶对称协变张量。如果不要求正定，则非退化 2 阶对称协变张量称为伪黎曼度量。仿紧微分流形上总存在黎曼度量，具有黎曼度量的流形称为黎曼流形。黎曼流形上至关重要的黎曼曲率则是 (1, 3) 型张量。

3. 可积结构

向量场或平面场的存在往往不一定意味着它一定可积。这正如平面上连续向量场，一般未必有一个积分曲线族，使得在每一点积分曲线的切向量正好是向量场在该点的切向量。为此，需要证明常微分方程解的存在和唯一定理。还有一个偶维流形上如有复结构，一定对应流形的一个近复结构。但是，流形上存在近复结构未必可积成为复结构。同样，叶状结构也属于这个范畴。

向量场或张量场的存在相当于向量丛截面存在的问题，其条件可由拓扑不变量或微分拓扑不变量来决定。但是可积条件则一般要求额外满足解析条件。

1.4 微分流形的几何结构

1. 整体问题

拓扑和几何虽然都是大几何的分支，它们之间却有明显的区别。对于微分流形的微分几何学和拓扑学，差别尤其明显。简而言之，几何学首先涉及度量，而拓扑则与度量无涉。微分几何的内容由来已久，主要课题来自三维空间中的曲线和曲面。黎曼把微分几何推广到高维，得出局部的无穷小度量，即

$$ds^2=\sum g_{ij}dx_idx_j。$$

微分流形最重要的几何结构，就是存在黎曼度量，从而使它成为黎曼流形，在其上可以开展微分几何。由于度量的存在，可以确定无穷小曲线的长度，两条曲线在交点处的角度以及 k 维（$1\leqslant k\leqslant n$）的体积。这样可以研究它们的变分问题，例如测地线和极小子流形。不管是测地线还是极小子流形，都依赖于微分几何学的中心概念——曲率。对于二维微分流形，这就

是高斯曲率。对于高维微分流形，这就是黎曼曲率张量。而且 M^n 的曲率张量决定流形在一点附近的全部局部信息。当然，它也包含大量的整体信息。在 20 世纪前三四十年，局部微分几何已经有相当成熟的发展，但整体微分几何只有在 20 世纪 40 年代之后才有实质性的进展，这个领域主要研究：

（1）各种曲率与拓扑不变量或微分拓扑不变量的关系，例如通过曲率的积分来表示欧拉示性数和贝蒂数，流形容许某种曲率性质的拓扑条件等等。

（2）子流形的几何学与流形的整体嵌入问题。

（3）黎曼流形的整体等距变换群。等距变换群的研究是从基灵和李开始的，一般是李群。典型的黎曼流形的等距变换群相当大。对于给定维数 n 的黎曼流形 M^n，具有最大等距变换群的 M^n 是常曲率空间，从某种意义上讲，它具有最丰富的对称性。具有稍逊的丰富对称性的空间是对称空间，其上总有可迁的李群作用。它的分类已由 E·嘉当在 1926 年完成，这个分类问题归结为半单李代数的分类。

2．联络

黎曼几何学从黎曼度量开始，然后由此得出各种曲率。在这个过程中引进协变导数和张量演算。但是，是否可以不经过黎曼度量而直接得出曲率的概念来呢？联络就提供了这样的手段。同时由于联络提供大范围信息，它是介乎拓扑结构、微分拓扑结构与微分几何结构之间的重要的中间结构。

联络的概念首先出现在 1917 年列维－奇维塔的工作中。在这个工作中，他考虑如何把向量的平行移动由欧氏空间搬到黎曼流形上。欧氏直线上各点的切线都平行，那么由黎曼流形上一些测地线上的切向量都平行，就可以得到其上的平行移

动。他是张量分析的奠基者之一，当然他仍用张量分析与协变导微的语言。外尔马上就意识到，平行性是仿射几何的概念，而无需黎曼度量。因此，只依赖于仿射性质，去掉黎曼度量，也可在黎曼流形上开展一种几何，这就是仿射联络。1924 年 E·嘉当又引入射影联络和共形联络，1926 年他提出一般的联络理论。1950 年埃瑞斯曼在纤维丛理论基础上，奠定了现代联络论的基础，他把联络定义到纤维丛上。

现代标准的联络定义可以通过光滑流形 X 上主纤维丛（E、p，X，G）定义，G 是在 E 上右作用的李变换群，即 $R_a(x)=xa$。

联络 对于 E 上各点 x，如果它的切向量空间 $T_x(E)$ 的一个向量子空间 H_x 满足下列三个条件，则称为在 E 上给定一个联络：

(1) $T_x(E)=H_x+T_x(p^{-1}(x))$。

(2) $R_a(H_x)=H_{xa}$(即 H 在 G 作用下变为自身)。

(3) 对应 $x \longmapsto H_x$ 是可微的。

对于 G 是李群，主丛和向量丛是等价的，还记作 E，这样，对于实或复的向量丛 E，可以定义标架丛上的联络，可由 E 上协变导微定义

$$\nabla : \Omega_x^0(E) \longrightarrow \Omega_x^1(E),$$

$\Omega_x^p(E)$表示 $\wedge^p T^* X \otimes E$ 的截面，即取值于 E 的 p 形式。反之，联络的存在也使我们定义在一点切向量方向上的张量场的导数称为协变导微。

∇满足莱布尼茨法则

$$\nabla(f\cdot s)=f\nabla s+df\cdot s。$$

联络有如下四条性质：

(1) 在 X 的平凡丛 $C^n \times X$ 上,存在乘积联络,其协变导微是向量值函数的通常微分。

(2) 联络是协变对象,即若

$$f: X \longrightarrow Y$$

为光滑映射,若 A 为 Y 上丛 E 的联络,则在 X 上丛 $f^*(X)$上可诱导一个联络 $f^*(A)$。

(3) 沿着底空间道路

$$r: [0,1] \longrightarrow X,$$

联络产生从元素 x, y 的平行移动,它是一个线性映射

$$T_r: E_x \longrightarrow E_y,$$

E_x, E_y 分别是x, y 上主标架丛。

(4) 两个联络的差是一个张量,对于每个联络,内在地附有两个张量,这就是曲率张量和挠率张量。

对于 E 上定义的联络,通常我们也可以引入联络形式 ω,ω 取值于G 的李代数g 的一次微分形式,ω 的协变微分

$$\Omega = \nabla \omega$$

称为联络的曲率形式,对它有结构方程

$$d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega$$

成立。满足 $\Omega = 0$ 的联络称为局部平坦联络。因此 Ω 反映一个联络与局部平坦联络的偏离程度。Ω 满足比安基(Bianchi, Luigi, 1856—1928)恒等式

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega。$$

对于正交标架丛,存在唯一使挠率张量为 0 的线性联络,称为黎曼联络或列维 - 奇维塔联络。对于黎曼流形的基本张量 g,

$$\nabla g = 0,$$

这样由一次微分形式组(ω^i,ω^i_j)，$1\leqslant i,j\leqslant n$，有结构方程

$$d\omega^i=\sum_i\omega^i_j\wedge\omega^j,$$

$$d\omega^i_j=-\sum_k\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\Omega^i_j。$$

曲率形式 Ω^i_j 可用M上(1,3)型张量场 R 来表示，即对于切空间 T_p 标准正交基有

$$\Omega^i_j=\sum R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

R^i_{jkl}即黎曼曲率张量。

3．曲率

对于黎曼流形，其上有三种曲率张量：

（1）黎曼曲率 R^i_{jkl}：它有 n^2（n^2-1）/12 个代数独立的分量，它对应截面曲率。

（2）里奇曲率 R_{ij}：

$$R_{ij}=-\sum_k R^k_{ijk}。$$

（3）标量曲率 R：

$$R=\sum_{ik}g^{ik}R_{ik}。$$

对于黎曼流形 M^n 的曲率给定条件，我们对流形可得到一些整体的结论：

（1）如黎曼流形 M 是完备的，且对所有 X 和所有二维平面$P_x\subset T_x$（M）截面曲率 A（P_x）$\leqslant 0$（P_x 为在X 处切空间 T_x 中的任意二维平面，A（P_x）表示对应这二维平面的截面曲率)，则 M 的可有覆盖微分同胚于R^n。

（2）如果对所有 X 和所有二维平面

$P_x\subset T_x$（M），

存在常数 $c>0$，使 A（P_x）$>c$，则 M 为紧。

（3）对于处处曲率为正的完备流形，我们有比较明确的拓

扑结构。

若完备的黎曼流形 M 截面曲率 K 处处满足

$$K \geqslant K_0 > 0,$$

则 π_1（M）为有限群。

若黎曼流形为紧，且截面曲率处处 >0，如 M 可定向，则 M 单连通，否则 π_1（M）$=Z_2$。

（4）球面定理

设 M^n 为单连通的黎曼流形，如截面曲率 K 满足

$$0 < \frac{K_1}{4} < K \leqslant K_1,$$

则 M^n 与球面 S^n 同胚。

在偶维情况下，这个条件不能再改善成

$$0 < \frac{K_1}{4} \leqslant K \leqslant K_1,$$

因为 CP^m，$m>1$ 即满足这个条件，但它与球面显然不同胚。

但是 1994 年阿布累什（Abresch，U.）和迈耶尔（Meyer，W.）证明，当 n 为奇数情形，球面定理却可以大大改进，即满足

$$0 < \delta K_1 \leqslant K \leqslant K_1,$$

且 $\delta < \frac{1}{4}$，使得 M^n 与 S^n 同胚。

另外，对于任何 n，存在 β（n）$>\frac{1}{4}$，使得如果

$$\beta\ ({}^1 n) \leqslant K \leqslant 1,$$

则 M^n 微分同胚于 S^n。

曲率形式与示性类的关系是几何与拓扑关系的重要组成部分，它的起点是高斯—邦内公式的高维推广。1940 年芬切尔（Fenchel，Werner，1905—）首先做了推广，其一般形式在

1943年由阿兰道弗尔（Allendorfer, Carl Bennett, 1911—1974）和魏伊得到，但其证明依赖于黎曼流形到欧氏空间中的嵌入。1944年陈省身给出一个内在的证明，这公式明确把欧拉示性数表示为黎曼曲率张量的代数式的积分。其后得到陈省身示性类和庞特里亚金示性类的曲率形式的表达式。

2 大范围分析

“大范围”（*Global*）也可以译为整体、全局，它的原义是全球，它的对立面是局部。流形的局部是欧几里得空间，在它上面有着丰富的结构，更有着各种坐标系，使我们很容易在上面开展数学分析。因此，长期以来，数学分析基本上是局部分析。局部 n 维欧几里得空间，经过拼接之后，可以成为各种各样的 n 维流形。所以，大范围分析也可以说是流形上的数学分析，它包括流形上的微积分，流形上的微分方程（如动力系统理论和叶状结构理论），流形上的变分法，流形上的函数论及泛函分析等等。

虽然大范围分析这个名词在 1965 年才开始出现，可是它的内容至少已有 100 多年的历史了。在微分流形上考虑微分算子的思想至少可追溯到黎曼与贝尔特拉米。到 19 世纪 80 年代，大数学家庞加莱已经在常微分方程论中引进几何方法，开创了微分方程定性理论的新方向。他一反过去具体局部求解的方法，而着重研究大范围内解曲线的分布状况。他发现，微分方程的奇点起着关键的作用，通过奇点的分类，对于解的性态有深入的了解，特别是提出了稳定性问题。后来的发展围绕着稳定性、周期解及极限环等问题展开，形成了动力系统理论的原型。庞加莱去世之前，对狭义三体问题（即其中一体的质量

远远比其它二体为小）证明定理：

（1）运动方程的解除了已知的雅可比积分之外，不存在其它的解。

（2）存在无穷多周期解。他没能证明这一点，只是把它归结成一个拓扑定理，这就是所谓“庞加莱最后定理”。

庞加莱最后定理 K 为平面上由两圆周 $r=a$ 和 $r=b$（$b>a$）所界定的平环闭曲域。设

$$r'=\phi(r,\ \theta),$$
$$\theta'=\psi(r,\ \theta)$$

为 K 到 K 上的映射，满足下列条件：

（1）映射保持面积不变；

（2）在此映射下，每边界圆映到自身之上，即

$$\phi(a,\ \theta)=a,$$
$$\phi(b,\ \theta)=b,$$

在映射之下；

（3）$r=a$ 上的点沿逆时针方向运动，而 $r=b$ 上的点沿顺时针方向运动，即

$$\psi(a,\ \theta)>\theta,$$
$$\psi(b,\ \theta)<\theta,$$

则这种映射有两个不动点。

他只对一些特殊情形证明这个定理，但没能给出一般证明就去世了。没有料到，他去世不到半年，这定理就被美国数学家伯克霍夫完全证明。庞加莱还用拓扑方法研究回归问题（如一个量体经过一段时期后是否还回到原来位置附近），并用极小极大方法来推动动力系统的研究，这可以说是大范围分析的第一个分支。大约同时，有人对环面上的微分方程进行充分的

研究。

2.1 德·拉姆理论

微分形式及其积分从微积分建立起就已定义，它们带有极明显的局部特征。在 19 世纪上半叶，微积分扩展到曲线、曲面和曲体上，并得出重要的公式——格林（Green, George, 1793—1841）公式、高斯公式和斯托克斯（Stokes, George Gabriel, 1819—1903）定理，它们反映积分与其边缘积分的关系。黎曼首先研究黎曼面上 1 次微分形式的积分与其拓扑性质的关系，1871 年贝蒂把它推广到 n 维流形情形，得出其上 1 次形式及 $n-1$ 次形式的积分的周期与其贝蒂数之间的关系。而只有在庞加莱系统建立组合拓扑学时，两者关系才得到系统论述。特别是庞加莱实际上对于任意 n 维微分流形引入整体的外微分形式的概念，只是他没有用这个词。他考虑的是所谓（封）闭微分 p 形式 ω，即满足 $d\omega=0$ 的形式。不过他也没有引入外微分，而是用等价的可积条件。在这个意义下，他得到 $d\cdot d\omega=0$，这就是所谓庞加莱引理。庞加莱以后，E·嘉当对于外微分形式进行许多研究，不过，他一直采用局部的观点。一直到 1922 年，他出版《积分不变量》一书，才采用整体观点。特别他证明在 R^n 中，任何闭微分 p 形式是 $(p-1)$ 形式的外微分。这是经典的 $p=1$ 情形的推广。但 E·嘉当不知道早在 1889 年，这定理已由意大利数学家沃尔泰拉证明。更重要的是 E·嘉当认识到这个“庞加莱引理的逆定理”并不能推广到任意微分流形上，例如 S^2 上的 2 形式就不是 1 形式的外微分。这个认识极为重要，实际上是德·拉姆上同调存在的根据。

E·嘉当的观点由局部到大范围的转变来自 1925 年魏伊关于李群的研究。从这时起，E·嘉当研究李群及齐次空间的拓扑。这样一来，微分流形上的外微分形式成为重要工具，由此他系统地发展了外微分形式法，特别认识到 $d(d\omega)=0$ 与同调的边缘算子$\partial\cdot\partial=0$ 的类似性。

在假定流形总有 C^1 剖分的情形下，存在着自然的双线性映射，使 p 维闭链 c 和闭 p 次形式 ω 与 $\int_c\omega$ 对应，即

$$(c,\omega)\longmapsto\langle c,\omega\rangle\int_c\omega。$$

这样，推广的斯托克斯公式就是：如果 ω 正合，即 $\omega=d\omega'$ 或者 c 是边缘，则 $\langle c,\omega\rangle=0$。1928 年，在假设 M 的贝蒂数为有限的前提下，E·嘉当猜想：

(1) 如对所有 p 维闭链，闭形式 ω 均满足 $\langle c, \omega\rangle=0$，则 ω 是正合。

(2) 如对所有闭 p 形式ω，p 维闭链c 均满足 $\langle c, \omega\rangle=0$，则 c 是边缘。

这时，瑞士数学家德·拉姆正好做他的博士论文，在读了 E·嘉当的短文之后，马上就证明了这两个猜想并由此发展了著名的德·拉姆理论。他在 1950 年以后，改写为上同调的语言。

德·拉姆理论概述

局部德·拉姆理论

首先考虑 R^n 上的外微分形式，设$(x_1,\cdots,x_n)$为 R^n 上坐标。Ω^* 为满足下列关系的由 $dx_1,\cdots,dx_n$ 所生成的R 上的代数：

$$dx_idx_j=0\quad(i,j=1,\cdots,n),$$
$$dx_idx_j=-dx_j\cdot dx_i\quad(i\neq j)。$$

作为 R 上的向量空间，Ω^* 的基为

$$1, dx_i, dx_idx_j, \cdots, dx_1\cdots dx_n,$$
$$i<j, i<j<k<n,$$

R^n 上 C^∞ 微分形式是

$$\Omega^*(R^n)=\{R^n \text{ 上 } C^\infty \text{函数}\}\otimes_R\Omega^*。$$

如 $\Omega^q(R^n)$ 由所有 C^∞ q 形式构成，则 $\Omega^*(R^n)$ 有自然分次

$$\Omega^*(R^n)=\oplus_{q=0}^n\Omega^q(R^n),$$

存在微分算子

$$d:\Omega^q(R^n)\longrightarrow\Omega^{q+1}(R^n)。$$

定义如下：

(1) 如 $f\in\Omega^0(R^n)$，则 $df=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$；

(2) 如 $\omega=\sum f_Idx_I$，则

$$d\omega=\sum df_Idx_I。$$

它称为外微分，满足 $d\cdot d=0$。外微分是向量分析中梯度($grad$)、散度(div)和旋度(rot)的推广。如在 R^3 中，

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$d(f_1dx+f_2dy+f_3dz)$$
$$=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dydz-\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dxdz+$$
$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$$

$$d(f_1dydz-f_2dxdz+f_3dxdy)$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dxdydz。$$

总结起来，即

$$d(0\text{ 形式})=grad,$$

d(1 形式) $= rot$，

d(2 形式) $= div$。

r 次微分形式 $\tau = \sum f_I dx_I$ 和 s 次微分形式 $\omega = \sum g_J dx_J$ 的外积 $\tau \wedge \omega$，简记为 $\tau\omega$，为

$$\tau\omega = \sum f_I g_J dx_I dx_J,$$

它满足：

(1)(反交换性) $\tau\omega = (-1)^{r\cdot s}\omega\cdot\tau$；

(2) $d(\tau\cdot\omega) = (d\tau)\cdot\omega + (-1)^r \tau\cdot d\omega$。

这样 $(\Omega^*(R^n), d)$ 形成一个复合形，称为德·拉姆复合形。$Ker d$ 为闭形式，$Im d$ 为正合形式，这样可以定义德·拉姆上同调为

$$H^q_{DR}(R^n) = \frac{\{\text{闭 } q \text{ 形式}\}}{\{\text{正合 } q \text{ 形式}\}}。$$

通过一些技术，不难把定义在 R^n 或其开集中的微分形式推广到一般的微分流形上。而且通过迈耶尔（Mayer，Walter）及费陶瑞斯同调序列可以计算德·拉姆上同调。

这样，我们得到了流形 M 的拓扑不变量——德·拉姆上同调代数。这个拓扑不变量有一定的优越性：

(1) 德·拉姆上同调与通常上同调一致。

德·拉姆定理 流形 M 的德·拉姆上同调代数 $H^*_{DR}(M)$ 与 M 的实系数上同调代数 $H^*(M, R)$ 同构。

特别当 $p > 0$ 时，$H^p(R^n) = 0$，

当 $p = 0$ 时，$H^0(R^n) = R$。

这也称庞加莱引理。

(2) 德·拉姆上同调的可计算性。

德·拉姆上同调可以通过微分形式计算，而且借助于微分

形式更进一步发展可计算有理同伦群，从而使可计算的拓扑不变量大大前进一步。这理论在 1970 年由苏里汶（Sullivan, Dennis, 1941—）和奎伦（Quillen, Daniel, 1940—）等发展，后为吴文俊构成 I^* 函子的系统理论。

2.2 莫尔斯理论

如 f 是微分流形 V 上的实值无穷可微（C^{∞}）函数，所谓 f 的临界点就是使微分 df 在该点为零的那些点 $x \in V$。这实际上是函数取极大值或极小值的点的推广，f 的临界点集可以是 V 中任意闭集，因此，企图根据其临界点的性质来对 C^{∞} 函数进行分类似乎是不现实的。临界点称为非退化的，如果 f 在这点的某一邻域中的泰勒展开的二次项所构成的多项式是一个非退化二次型。根据定义，这个二次型的指数就是临界点的指数。只有非退化临界点并且在这些点（它们必定是孤立的）取不同值的函数是一些非常特殊的函数，与 V 的拓扑密切相关，它们是决定 V 的一个“环柄表示”的函数，但是，重要的事实在于，关于 V 到 R 中的 C^{∞} 映射所构成的空间 $\epsilon(V)$ 的某一适当的拓扑，这些“莫尔斯函数”在 $\epsilon(V)$ 中形成一个稠密开集。

莫尔斯理论的早期成果是莫尔斯不等式。对于 M 是紧流形，它把临界点的数目与 M 的贝蒂数联系起来。

莫尔斯不等式　若 f 是 M^n 上只含非退化临界点的可微函数，设 M_{λ} 为 M 上的 f 的指数为 λ 的临界点的个数，b_i 为 M 的 i 维贝蒂数，则有下列不等式成立：

$$M_0 \geqslant b_0;$$

$$M_1 - M_0 \geqslant b_1 - b_0;$$

$\cdots$

$$M_i - M_{i-1} + \cdots + (-1)^i M_0 \geqslant b_i - b_{i-1} + \cdots + (-1)^i b_0;$$

$\cdots$

$$M_n - M_{n-1} + \cdots + (-1)^n M_0 \geqslant b_n - b_{n-1} + \cdots + (-1)^n b_\circ$$

特别是，对于所有的 k，有 $M_k \geqslant b_k$ 成立。

莫尔斯不等式只是一个初步估计，要派上用场还需要进一步精密化：若

$$M(f, t) = \sum_p t^{\lambda(p)},$$

p 是 f 的临界点，

$$P(V, t) = \sum t^k \dim H_k(V, R)$$

是 V 的庞加莱级数，这样，莫尔斯不等式有下述形式：

对于任何非退化函数，都存在一个系数非负的多项式

$$Q(f, t) = q_0 + q_1 t + \cdots$$

使得

$$M(f, t) - P(V, t) = (1 + t) Q(f, t)。$$

这样可推出莫尔斯空隙定理。

莫尔斯空隙定理 若 $M(f, t)$ 中出现 t 幂次的空隙，即某一个 t^r 的系数为 0，则

$$Q(f, t) \equiv 0,$$

即

$$M(f, t) = P(V, t)。$$

由此，从 f 临界点附近的局部计算，可算出整体的同调结构。

在应用莫尔斯理论时，斯梅尔证明了莫尔斯理论基本定理。

莫尔斯理论基本定理 设 M 是完备的黎曼流形，p，q 是沿所有测地线互不共轭的 M 的两点，则 M 上以 p 为起点，

以 q 为终点所有道路的集合 Ω（M；p，q）具有可数 CW 复合形的同伦型。

莫尔斯理论还可以进一步推广到无穷维流形。

莫尔斯理论对于微分几何学和拓扑学取得重大突破起着积极的作用：

（1）闭测地线问题。莫尔斯理论属于大范围变分法的分支，而大范围变分法最早也是最主要的问题是黎曼流形上的闭测地线存在和数目问题。最先考虑的是与球面同胚的流形上闭测地线存在与数目问题。标准球面上的闭测地线是大圆，当然有无穷多，但是经过光滑变形之后，显然就没有那么多，甚至也有可能不存在。庞加莱在 1904 年提出这样的猜想：二维凸闭单连通曲面上至少存在 3 条没有自交点的闭测地线。美国数学家伯克霍夫在 1917 年证明，在二维单连通闭曲面上，至少存在一条闭测地线。而到 20 世纪 20 年代，苏联数学家刘斯铁尔尼克（Lusternik，Lazar，1899—1981）和什尼列尔曼（Schnirelman，Lev，1905—1938）引入以他们的姓命名的"范畴"（要与范畴函子理论的范畴及纲性的范畴区别开来）理论。他们的范畴理论也是大范围变分法的一部分，虽然也能给出闭流形稳定临界点数的下界，但不能精确计算。尽管如此，他们利用"范畴"证明了庞加莱的闭测地线数目猜想。而莫尔斯理论，首先把闭曲线问题系统地推进到一般紧黎曼流形，即将闭曲线中的闭测地线描写为能量积分的临界点。这样 1976 年克林根伯格（Klingenberg，Wilhelm，1924—）证明单连通闭黎曼流形上一般总存在无穷多条闭测地线。

（2）计算典型李群的稳定同伦群，这是 1957 年由美国数学家鲍特完成的，他也是第一个把莫尔斯理论有效地运用在解

决重大拓扑问题上的范例。

(3) 1960 年鲍特的学生斯梅尔再次利用莫尔斯理论在拓扑学上取得突破，证明五维及五维以上的广义庞加莱猜想。

2.3 微分映射的奇点理论

前面谈到过，映射的研究要比空间的研究复杂得多，空间是有限维的，但它的映射空间一般是无穷维的。对于无穷维空间，处理起来就需要更一般的拓扑、纲性、测度等理论知识。为了理解一般的微分映射，先看一下简单的情形，实际上是局部的情形：

(1) $R^1 \longrightarrow R^1$，这是最简单的微分映射，其实就是单变元可微函数。研究它们属于一元微积分的范围，其重要的概念是导数和微分。

(2) $R^n \longrightarrow R^1$，这是多变元可微函数，研究它们属于多元微积分范围，其重要概念是偏导数与全微分。这两种情形都出现临界点问题，而临界点就是后来研究的奇点。而非奇点实际上就是正常点、通常点或一般点。自然它们不是主要的研究对象，微分映射的研究重点自然转向奇点，然后通过奇点对微分映射进行分类，对于可微函数有两个基本定理：

(1) 反函数定理。

(2) 隐函数定理。

它们都可以推广到一般情形。

为了把临界点理论推广，1955 年惠特尼创立了奇点理论，它来源于微分嵌入及浸入问题。奇点是临界点的推广，1942 年他首先研究 n 维欧几里得空间 E^n 到 E^{2n-1} 的微分映射 f 的奇点，发现使 f 微小变化，可得 f^*，它的奇点是孤立奇点，

并可化为标准型：

$$y_1 = x_1^2,$$

$$y_i = x_i \quad (i=2, \cdots, n),$$

$$y_{n+i-1} = x_1 x_i \quad (i=2, \cdots, n)。$$

1955年，他首先对于平面 R^2 到 R^2 的奇点类型进行分类，证明惠特尼定理，即任何 $R^2 \longrightarrow R^2$ 的都可以由下面三种标准映射逼近，结果除了正规类，即

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y \end{cases}$$

外，奇点只有两类，一类是折点（*fold*），其标准型为

$$\begin{cases} u = x^2, \\ v = y。\end{cases}$$

另一类是尖点（*cusp*），其标准型为

$$\begin{cases} u = xy - x^3, \\ v = y。\end{cases}$$

惠特尼正是通过这篇论文，开创了奇点理论。1956年他又对 $R^n \longrightarrow R^m$ 的微分映射奇点的一些情形进行分类并得出标准型，其中包括

$$n \geqslant m = 2, 3,$$

以及

$$(n, m) = (4,4), (5,5), (5,4), (n, 2n-2)$$

等情形。对于其它的 $R^n \longrightarrow R^m$，其中

$$n = 3, 4, \quad m = 4, \cdots, 2n-3,$$

在当时所知甚少。这个基本的奇点分类问题连同其它问题形成了奇点理论的热门。

惠特尼的理论推广到高维很难，法国数学家托姆引进一系

列工具克服这些困难，其中包括：

（1）用埃瑞斯曼引进的导网（*jet*）J（n，p）来代替 ϵ（n，p）；

（2）提出一般的横截理论；

（3）集中于研究稳定的映射。

他们引进下面的基本思想：

（1）只考虑"一般的"映射，这些映射由某个阶（依赖于 M 和 N 的维数 m 和 n）的"导网"（*jet*）的条件来刻画。

（2）在 C^∞映射

$$f: M \longrightarrow N$$

的集合 ϵ（M，N）上引进两个等价关系：一个是微分等价，其定义为 f 和 f' 等价，如果存在 M（N）到自身之上的一个微分同胚 g（h），使得

$$f' = h \cdot f \cdot g。$$

一个是拓扑等价，其中 g 和 h 只需要是同胚即可。

（3）在集合 ϵ（M，N）上引进一个自然的拓扑。一个映射

$$f \in \epsilon(M, N)$$

称为微分（拓扑）稳定的，如果与 f 微分（拓扑）等价的映射形成 f 的一个邻域。

这些似乎使人觉得，一个"一般的"映射应该在刚刚定义的这种或那种稳定的意义下是稳定的，并且一般的映射应该在 ϵ（M，N）中是稠密的。

（4）对于

$$f: M \longrightarrow N,$$

一点 $x \in M$ 称为奇点，如果 f 的切线性映射不具有极大秩。

对于一般的映射 f，可以推想，奇点 f 会形成一个子流形 $S(f)$，当映射 f 限制在 $S(f)$ 上时，它又有一个奇点的子流形 $S(s(f))$，如此下去。并且，从同调的观点来看，奇点的轨迹 $S(f)$、$S(s(f))$ 等等通过普通的多项式公式，与 M 的史梯费尔—惠特尼示性类以及 N 的史梯费尔—惠特尼示性类在 f^* 下的象关联起来。

惠特尼和托姆开创了研究奇点理论这个大规模纲领。他们的新思想主要是集中注意于一般的映射。这个纲领主要由麦泽尔在 20 世纪 60 年代末的工作而大大推进了。他证明，拓扑稳定的映射总构成 $\epsilon(M, N)$ 中的稠密开子集，但是对于微分稳定的映射，同样的论断只对某些明显定出的维数对 (m, n)（“好维数”）才成立。一般的映射总是拓扑稳定的，而在好维数下，一般的映射恒同于微分稳定映射。这里证明的技术在于把微分稳定性的问题归结为所考虑映射的导网的相应问题，然后，由于一个关键的结果，即由托姆猜想，而由马格朗日证明的 C^∞ 情形的魏尔斯特拉斯“预备定理”，从而可以运用交换局部环理论这个工具。

1967 年起，以阿诺德（Arnold, Vladimir, 1937—）为代表的苏联学派对奇点理论继续向前大大推进一步。特别是他们把退化临界点附近的奇点类型进行分类，他们引入稳定等价的概念：O 点两个函数芽，称为稳定等价，如果加上非退化的二次型之后，两个函数芽等价。

这时临界点的分类可归结为重数 μ 和模数 m 的不同。m 表示在临界点附近的所有互不等价临界点的参数数目，而 $m=0$ 则称为单奇点，即奇点周围最多有有限多互不等价的临界点。阿诺德在 1972 年证明，在稳定等价之下，单奇点的分类

与单李代数对应，即它们可表为如下的标准型：

$$A_k: f(x) = x^{k-1}, \quad k \geqslant 1;$$

$$D_k: f(x, y) = x^2 y + y^{k-1}, \quad k \geqslant 4;$$

$$E_6: f(x, y) = x^3 + y^4;$$

$$E_7: f(x, y) = x^3 + xy^3;$$

$$E_8: f(x, y) = x^3 + y^5。$$

他还分类高模数的情形。

2.4 指标定理

指标定理是横跨分析（包括偏微分方程）、代数、几何、拓扑诸领域的大综合，也是当前数学研究的重点之一。从 20 世纪 60 年代起，横跨这些领域的中心是阿提雅—辛格(Singer，Isador Manuel，1924—）指标定理。几个数学的大定理，例如微分几何学的高斯—邦内定理、代数几何学的黎曼—洛赫定理以及微分拓扑学中的希采布鲁赫的符号差定理都是阿提雅—辛格指标定理的特例，由此就可以看出它在数学中的中心地位。

阿提雅—辛格指标定理是一个等式，等式的一端是闭微分流形的拓扑不变量，另一端是该流形上椭圆微分算子的解析不变量。一般情形下这两个几乎是无法联系在一起的。

线性微分算子 D 从局部看是很清楚的。设 U 为 R^n 中开集，A, B 为 R 或 C 上的向量空间，设 $E = U \times A$，$F = U \times B$，$\Gamma(E)$和 $\Gamma(F)$为定义在 U 上分别取值于 A 和 B 中的函数空间，则线性算子

$$D: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$$

是一个 k 阶微分算子，如果对任何 n 数组$\partial=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$，$\partial_i$ 均为非负整数，

$$|\partial|=\sum_{i=1}^{n}\partial i$$

都存在一个映射

$$L_\partial: U \longrightarrow Hom(A,B),$$

使得对于任何 $f\in\Gamma(E)$，

$$D(f)=\sum_{|\partial|\leqslant k}L_\partial D^\partial f,$$

其中

$$D^\partial=\frac{\partial^{|\partial|}}{\partial x_1^{\partial_1}\cdots\partial x_n^{\partial_n}}。$$

令 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，

$$y^\partial=y_1^{\partial_1}\cdots y_n^{\partial_n},$$

$$v=(x,y)\in U\times R^n,$$

定义

$$\sigma_i(D)=\sum_{|\partial|\leqslant k}y^\partial L_\partial(X): A\longrightarrow B,$$

如果对于 $y\neq 0$ 的所有 $v=(x,y)$，$\sigma_v(D)$是同构，则称微分算子是椭圆算子。

对于大范围分析，就是把上面的局部分析的定义推广到闭流形上。这样只需把上面的定义中的 E，F 由平凡丛换成M 上向量丛，这时 $\Gamma(E)$，$\Gamma(F)$就是向量丛 E 和 F 的截面的集合，而微分算子

$$D:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(F)$$

成为整体微分算子，只要 D 在每坐标块上是局部的 k 阶微分算子，其椭圆性也可同样定义。

算子的指标 $D:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(F)$的指标定义为 $\mathrm{Ind}(D)=$

$\dim ker\ D - \dim Coker\ D$，其中 $ker\ D$ 为 D 的核，$Coker\ D$ 为 D 的余核即商空间 $\Gamma(F)/ImD$，ImD 表示 D 的象，dim 为空间的维数。

自然要使指标有定义，必须要求 $kerD$ 和 $Coker\ D$ 的维数是有限(整)数，而且 ImD 在 $\Gamma(F)$ 中是闭的，这样的映射称为弗瑞德荷姆映射。因此微分算子的指标是对弗瑞德荷姆映射是整数。

对于 $\Gamma(E)$、$\Gamma(F)$ 是巴拿赫空间时，弗瑞德荷姆映射可由下面定理刻画：

$D:\Gamma(E)\longrightarrow\Gamma(F)$ 是弗瑞德荷姆映射，当且仅当存在连续线性算子 $\overline{D}:\Gamma(F)\longrightarrow\Gamma(E)$，使得 $1-D\overline{D}$ 和 $1-\overline{D}D$ 都是紧算子。

对于弗瑞德荷姆映射(算子)，我们有极好的不变性质：如 A 是紧算子，则

$$\mathrm{Ind}(D+A)=\mathrm{Ind}D,$$

拓扑指标为 $\{ch(D)\cdot T(M)\}[M]$。其中 $ch(D)$ 由陈省身特征标 ch 得来。陈省身特征标为环同态

$$ch:K(M)\longrightarrow H^{*}(M;Q)。$$

一个椭圆算子 D 定义一个差元素

$$d(E,F,\sigma)\in K(B(M)/S(M)),$$

$$chd(E,F,\sigma(D))\in H^{*}(B(M)/S(M),Q)。$$

经托姆同构可得 $ch\sigma(D)$，简记为 $chD\in H^{*}(M,Q)$。

$T(M)$ 为托德(Todd, John Arthur, 1908—)类，它是切丛的示性类，可由庞特里亚金示性类算出。[M] 表示在 M 的基本类上取值，这样得出的恰好也是整数。

阿提雅一辛格指标公式 对于闭可定向微分流形 M 及其

上任何椭圆微分算子D，有

$$\mathrm{Ind}D = \{ch(D)\cdot T(M)\}[M]。$$

阿提雅和他的合作者在其后15年间进一步把闭流形上的指标公式推广到更一般情形：

(1) 具有边缘的紧流形（阿提雅1965)。

(2) 椭圆复合形。

由此得出莱夫谢兹不动点公式的推广，这是阿提雅和鲍特在1966年合作的。这个不动点公式产生巨大应用，例如证明极强的定理，h配边的透镜空间是等距的，这样把莱德迈斯特挠元与椭圆算子联系在一起。

(3) 同变指标定理，即在紧群作用保持椭圆算子不变的情形下的指标公式，由阿提雅和他的学生塞加尔（Segal, Graeme, 1941—）在1968年得出。由此证明旋流形如果$\hat{A}$亏格不等于0，则不允许有效的圆周S^1作用。由此到1987年产生椭圆亏格理论。

(4) 椭圆算子族。阿提雅和辛格在1971年用纯K理论方法得出，这个推广在研究纤维空间的符号差上获得应用，其中基本群起着重要作用，后来知道它同引力的反常性有关。

(5) 模子指标理论。1969年由阿提雅和辛格提出。它在多复变、代数几何学、超弦理论等分支都有应用，而且与康耐循环同调论有关。

这个伟大的定理自然引导各行各业的数学家从不同角度得出它的证明：

第一个证明是阿提雅和辛格最早在1963年得出的，它主要依赖于配边理论，这个拓扑理论自然造成诸多限制，因此他们一直在搜寻更好的证明。

第二个证明是阿提雅和辛格仿照格罗登迪克关于黎曼—洛赫—希采布鲁赫定理的证明，这个证明把流形嵌入到欧氏空间，使分析问题易于处理。这个证明完全建立在纯 K 理论之上而避开有理系数上同调。它首先在 1968 年发表。在 1968 年发表的三篇论文和在 1971 年的两篇论文都以“椭圆算子的指标”为题，进行大量的推广。

第三个证明是阿提雅、鲍特和印度数学家帕托迪（Patodi，Vijay Kumar，1945—1976）在 1972 年提出的。这个方法应用热核，也就是热方程的核函数，把指标表示成热核的迹的差。

20 世纪 80 年代以后出现三类证明：

（1）1982 年威滕提出用超对称理论进行证明，1983 年盖茨勒（Getzler）用超流形上伪微分算子给出一个严格的证明。

（2）1988 年盖茨勒给出一个完全初等的证明。

（3）1984 年法国数学家毕斯木特（Bismut，J.）通过概率方法给出一个证明。

2.5 叶状结构

叶状结构（*foliation*）可看成流形上常微分方程的推广。最普通的常微分方程是：

（1）在欧氏空间（或其中一部分）给定一个向量场。

（2）这个向量场是可积的，也就是说，可以用积分曲线连结起来，使得过每一点有唯一的积分曲线在该点的切向量与向量场在该点的向量一致。

（3）在没有奇点的情形下，这些积分曲线合在一起填满整个空间。

叶状结构考虑的是：

(1) 在任意的 m 维 C^k ($0 \leqslant k \leqslant \omega$) 流形上给定一个 p 维"平面"场，$1 \leqslant p \leqslant m$。

(2) 这个 p 维平面场是可积的，也就是说，可以用嵌入在 M 中的 p 维子流形连结起来，使得过每一点有唯一的 p 维子流形，它在该点的切空间与给定的 p 维平面场一致。

(3) 这些 p 维子流形合在一起构成整个流形。这样我们就有如下的定义。

定义 m 维流形 M 上的一个 C^r ($0 \leqslant r \leqslant \omega$) p 维或余维 q ($q = m - p$) 的叶状结构是把 M 分解成互不相交的连通子集 $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$，使得 M 的每一点都存在一个邻域 U 和一个 C^r 坐标系

$$(x, y): U \longrightarrow R^p \times R^q,$$

使得对每个子集 L_α，$U \cap L_\alpha$ 可用下列方程组表出：

$$y_1 = \text{常数},$$
$$\cdots$$
$$y_q = \text{常数}。$$

每个这样的子集被称为叶状结构的叶 (*leaf*)，这样的邻域 U 被称为特选邻域，我们用

$$F = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

来表示叶状结构（及其叶）。

叶状结构理论的问题有下面几方面：

(1) 存在性问题。这个问题自然分成两个问题，首先是 p 维平面场的存在问题——这是一个纯拓扑问题，远未完全解决。其次在 p 维平面场存在的前提下，它是否可积，答案不一定是肯定的。

(2) 变形问题。一个 p 维平面场是否可以连续变形成一个叶状结构。

(3) 分类问题。刻画叶状结构并加以分类。

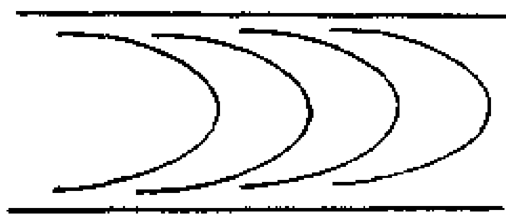
(4) 紧叶问题。什么条件下紧叶存在。

(5) 有奇点的叶状结构。

例子：除了乘积空间的平凡的叶状结构外，还有：

(1) 环面 $S^1\times S^1$ 上向量场有平行斜线的向量场，显然叶状结构存在。当斜率是有理数时，每叶都是闭的。如果 a_1/a_2 不是有理数，每个叶在 M 中稠密。

(2) $M=D^2\times S^1$，其上有著名的瑞伯（Reeb，Georges，1920—）叶状结构，轮胎里面一个套一个，轮胎表面也是一个叶。



这是余维 1 的叶状结构。

(3) $S^3=D^2\times S^1\cup S^1\times D^2$，即把两个环柄沿边界粘在一起，所以 S^3 中也有一个叶状结构，这个叶状结构是余维 1 的 C^∞ 叶状结构。但是，S^3 上是否存在实解析的余维 1 的叶状结构呢？海弗里格（Haefliger，Andre，1929—）给出了否定的答案：不仅 S^3，而且任何紧单连通流形上都不存在余维 1 的实解析叶状结构。

下面我们对叶状结构理论作些简单介绍。

1．存在性问题

一般来说，一个流形上连续 p 平面场不一定存在。例如，S^5 上没有连续 2 平面场（从而没有 3 平面场）。并且即使 p 平面场存在，也不一定可积。实际上，我们有下面的定理：

鲍特定理 设微分流形 M 上有余维 q 的叶状结构，设 υ 为其法平面场构成的丛，则

$$Pont^k(\upsilon)=0, \quad k>2q。$$

这里 $Pont^k(\upsilon)$ 是 υ 的庞特里亚金示性类 $\in H^*(M; R)$。

由此定理可以推出，复射影空间 $P^n(C)$ 当 $n=$ 奇数时，存在余维 α 的平面场，但根据鲍特定理，这平面场不可积。这些是负面的结果。

正面的结果对于余维 1 的情形存在性已完全解决，一流形上存在余维 1 的叶状结构当且仅当欧拉示性数为零。在这定理证明之前，曾有许多特殊的构造性结果。

对于高余维的叶状结构，1974 年以前知道的极少，当时还不知道 S^7 上是否有余维 2 的叶状结构，虽然在 S^7 上已经造出余维 1，余维 3，余维 4、余维 5、余维 6 的叶状结构。其中余维 4，余维 6 是通过霍普夫纤维化 $S^7\to S^4$ 及 $S^7\to P^3(C)$ 得出的，其余的则较为复杂。

1974 年，瑟斯顿对于紧流形上高余维叶状结构给出了极大的推动，他证明了下列定理：

定理 τ 同伦于 C^r（$0\leqslant r\leqslant\infty$）叶状结构的充分必要条件是 $\tau^\perp$ 是 M 上的海弗里格结构（定义见后）的法丛（即 $\tau^\perp$ 的分类映射 $n: M\longrightarrow BGLq$ 可提升到 $B\Gamma_q^r$）。

由这个定理可以推出：

（1）任何 $\geqslant 4$ 维流形上的 α 平面场都同伦于一个叶状结构。

(2) 任何余维≥2 的平面场都同伦于一个 C^0 叶状结构。

(3) 任何 q 标架场（$q\geq 2$）构成的 q 平面场都同伦于一个叶状结构的法丛。

由此完全解决 S^7 上各余维的叶状结构的存在问题。

2. 奇异示性类

受到鲍特定理的启发，特别是证明过程中不只是庞特里亚金示性类，而是与曲率有关的庞特里亚金形式等于 0，使我们能够定义叶状结构的某些示性类。为此，我们考虑 R 上分次微分代数

$$WO_q = \Lambda(u_1, u_3, \cdots u_{2[\frac{q}{2}]-1})\otimes P_q(c_1, \cdots, c_q),$$

其中 Λ 表示外代数，P_q 表示由 $c_1, \cdots, c_q$ 生成的多项式代数模全次数 $>2q$ 的项，u_k, c_k 是生成元，$deg(u_k)=2k-1$, $deg(c_k)=2k$，满足 $du_k=c_k$, $dc_k=0$。假设 F 是 M 上光滑的，余维 q 的叶状结构，具有法丛 ν。在 ν 上选取 F—联络 D' 和一个黎曼联络 D^0。于是，我们可得一个映射

$$\varphi: WO_q \longrightarrow C^*(M),$$

其中 $C^*(M)$ 为 M 上微分形式外代数。它把 C_k 映到 $P_k(R')$，U_k 映到 $\tau P_k(R^1, R^0)$，其中 $P_k(R)$ 是 ν 的 $(\frac{k}{2})$ 次庞特里亚金示性形式，

$$\tau P(R^1, R^0) = k\int_0^1 P(D^1 - D^0, R^t, \cdots, R^t)dt,$$

$$D^t = tD' + (1-t)D^0$$

是 ν 上联络，R^t 表示 D^t 的曲率，被积式对所有置换求和，即

$$P(R)(X_1, \cdots, X_{2k}) = \sum_{\text{置换}\sigma}(1)^\sigma P(R_{X\sigma(1), X_\sigma(2)}, \cdots, R_{X\sigma(2k-1), X_\sigma(2k)})。$$

由于 $P_k(R^0)=0$ 对于 k 为奇数，所以 φ 是分次微分代数同构，

由此得出诱导映射

$$\varphi: H^*(WO_q) \longrightarrow H^*(M;R)$$

只依赖于 F 本身，与联络的选取无关。

$H^*(WO_q)$是 R^q 上形式向量场的相对盖尔范德上同调。

注意 $u_1c_1 \in WO_q$ 满足 $d(u_1c_1) = c_1^2 = 0$, $\varphi(u_1c_1) \in H^3(M;R)$称为高德比肃(Godbillon, Claude)—威(Vey, Jacques)示性类，是这些类中首先发现的。他们当时通过构造方法得出：

设 M 上可积的一次微分形式 $\omega \neq 0$，则由弗洛宾尼乌斯可积条件，存在一次微分形式 θ，使得

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

成立。那么 $\theta \wedge d\theta$ 为三次闭微分形式。根据德·拉姆定理，$\theta \wedge d\theta$ 决定 $H^3(M,R)$中的上同调类，此即高德比庸一威不变量。

除了 u_1c_1 之外，$u_1c_1^q$ 所对应的上同调类也称为高德比庸一威类。汝萨里(Roussarie, Robert)证明，所有这些类都是不平凡的，也即存在余维 q 的叶状结构，使得 $\varphi(u_1c_1^q) \neq 0$。

除此之外，瑟斯顿用高德比庸一威示性类证明 S^3 上至少有连续统基数那么多的互不同伦余维 1 的叶状结构。他证明，对于每个 $t \in R$，在 S^3 上存在一个余维 1 的叶状结构，其高德比庸一威类在基本闭链 $[S^3]$ 上取值为 t。

3．分类理论

分类理论来源于海弗里格关于分类空间的思想，也就是造一空间 $B\Gamma_q^r$，其上有（广义的）余维 q，C^r 叶状结构，使得对于任意流形 M，M 上的每个余维 q 的 C^r 叶状结构都可以由映射 $M \longrightarrow B\Gamma_q^r$ 的唯一的同伦类诱导出来，从而可以用同伦论方法研究 M 上的叶状结构的集合。

为了造出 $B\Gamma_q^r$，首先必须推广叶状结构的定义。广义叶

状结构的定义如下：

定义 拓扑空间 X 上的余维 q，C^r 海弗里格结构是 X 的极大开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使得对于每 α、β，如 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，就存在连续映射

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \Gamma_q^r,$$

其中 Γ_q^r 是 R^q 的局部 C^r 同胚芽的集（亚群），并且对 α，β，γ，如

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing,$$

则这些映射适合上闭链条件

$$\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}。$$

对于任意拓扑亚群 Γ，都可以相应作出 Γ 结构，这些都是伪群结构。

最重要的分类定理是下述定理：

定理 设 M 为 $C^k(k\geqslant 0)$开流形，则对于每 $r\leqslant k$，$R_q = 0, \cdots, \dim(M)-1$，则 M 上的余维 q，C^r 的海弗里格结构的“等价类”与 M 上余维 q，C^r 叶状结构的可积的同伦类成一一对应。

这定理对于紧流形也成立，只是“等价”条件更窄了。

关于紧流形的这个瑟斯顿定理最后推出长时期的猜想：一个流形存在一个余维 1 的叶状结构，当且仅当其欧拉示性数为零。

海弗里格利用布朗的表示定理证明仿紧空间上 Γ 结构的分类定理。

定理 对于任意拓扑亚群 Γ，存在空间 $B\Gamma$ 具有 Γ 结构 δ_0，使得：

(1) 对于仿射空间 X 上任意的 Γ 结构，存在一个连续映射 $f: X \longrightarrow B\Gamma$，使得 $f^*(\delta_0) = \delta$。

(2)由仿紧空间 X 到 $B\Gamma$ 的两连续映射 f_0, f_1, Γ 结构 $f_0^*(\delta_0)$与 $f_1^*(\delta_0)$等价当且仅当 f_0, f_1 同伦。

仿紧空间上 q 维向量丛 v 由

$$f_v: X \longrightarrow BGL_q(R)$$

来分类,所以 v 是否余维 q, C^r 的海弗里格结构等价于是否能提升 f_v 到 $B\Gamma_q^r$。这个提升的阻碍属于 $H^k(X; \pi_{k-1}(B\overline{\Gamma}_q^r))$, $B\overline{\Gamma}_q^r$是 d 的同伦论纤维。$B\overline{\Gamma}_q^r$ 是具有平凡化法丛的余维 q, C^r 海弗里格结构的分类空间。

关于 $B\Gamma_q^r, B\overline{\Gamma}_q^r$ 的主要定理是:

映射 $d: B\Gamma_q^r \longrightarrow BGL_q(R)$是$(q+2)$连通的,即

$$\pi_i(B\overline{\Gamma}_q^r)=0,\ i=0,\cdots,q+1, 1\leqslant r\leqslant\infty。$$

由此定理可得:

紧 C^r 流形($1\leqslant r\leqslant\infty$, $r\neq \dim M-1$)每个 2 平面场都同伦于 M 上的一个 C^r 叶状结构的切平面场。

3 复解析几何学

3.1 多复变函数论

多复变解析函数论是单复变解析函数论的自然推广。早在19世纪末，就已经把单复变最简单的结果平行地推广到多复变，而且尝试把一些一般定理，如魏尔斯特拉斯定理（整函数的表示问题）及米塔格—莱夫勒定理（亚纯函数的有理分式表示）推广到多复变情形。在这方面魏尔斯特拉斯和庞加莱做出最大的贡献。魏尔斯特拉斯证明预备定理，对后来代数理论有重大作用。庞加莱则最早明确认识到多复变与单复变的不同。不过多复变明显的特点是哈托格斯在1906年首先发现的。从历史的观点看这应该是多复变函数论研究的起点。

最早的多复变函数论的综述是奥斯古德1914年的书及1924年《函数论》第二卷第一版，但较全面的总结则是1929年《函数论》第二卷第二版。其后的成就见于贝恩克(Behnke, H. 1898—1979）及图仑的《多复变函数论》(1934) 和博赫纳及马丁（Martin, W. T. 1911— ）的《多复变》(1948) 两书中。对于1950年以前的多复变，外尔在“半世纪的数学”一文中说“多复变解析函数论，虽有一些深刻的结果，仍然还处于它的草创阶段”。实际上，从1951年起，在拓扑学、微分几何学、抽象代数学、李群理论以及分析

学的发展的共同作用下，多复变函数论迎来一个崭新的时期。

首先，研究对象已由多元复数空间 C^n 中的区域推广到复解析流形及解析空间。1951 年德国数学家施坦因（Stein, Karl, 1913—）把全纯域的性质抽象出来，定义了后来以他的名字命名的施坦因流形。它具有许多好的性质，特别是在 1951 年 H·嘉当及塞尔在其上引进绯索系数上同调及凝聚层的概念，用绯索上同调来表述分析成果，特别是库辛第一、第二问题，这样一举解决（定理 A、B）施坦因流形上的库辛第一、第二问题。反过来，他用绯索上同调刻画施坦因流形。德国数学家格劳尔特（Grauert, Hans, 1930—）在 1958 年证明：复解析流形的相对紧域，如是强伪凸，则是施坦因流形。1953 年塞尔提出问题：底及纤维均为施坦因空间，丛空间是否也是施坦因空间？这个问题刺激了多复变特别是施坦因空间理论的发展。到 1977 年斯科达（Skoda, Henri）举出一个反例。

复解析流形虽然是单复变解析函数的定义域——黎曼面（一维复流形）的自然推广，但是许多自然定义的集合，最简单的象解析函数的零点集，一般并不是一个复解析流形。因为不是每一点都有一个邻域与 C^n 双全纯等价，显然这是因为奇点的缘故。为此，必需把研究对象由复流形大大推广，这就是复空间或解析空间的概念。它们首先是由贝恩克和施坦因在 1951 年引进的。20 世纪 50 年代中期起，运用绯索上同调理论，格劳尔特、雷姆尔特（Remmert, Reinhold, 1930—）及施坦因等人得出一系列基本结果。

解析空间之间的映射中，重要的一类是正常映射（紧集的原象是紧的）。关于正常映射的基本结果是 1960 年格劳尔特证

明的直接象定理：

$$f: X \longrightarrow Y$$

是正常映射，则 X 上的凝聚绯索的各次直接象都是 Y 的凝聚绯索。特别 $f(X)$ 是 Y 的解析子空间，另外广中平祐还把奇点解消定理推广到解析空间。

1906 年之前，多复变函数论只是单复变的平行推广，但是多复变解析函数的定义域远比单复变复杂，而且多复变解析函数还具有不同于单复变函数的独特性质，这就是 1906 年由德国数学家哈托格斯（Hartogs，F. 1874—1933）发现的向内可解析开拓性：设 C^n 中的域 G 内有一个紧集 K，只需 $G \setminus K$ 是连通的，任何在 $G \setminus K$ 上全纯函数都可开拓到整个 G 上。这个性质对 $n=1$ 是决不成立的，由此多复变函数走上自己独立的发展道路。对向外开拓，多复变情形也不同于单复变情形总有开拓不出去的全纯函数，一般所有全纯函数都可以开拓到更大的域中去，而不具有这种性质的域则称为全纯域。这样，哈托格斯及庞加莱发现了多复变（主要是双复变）与单复变之间的本质不同，到 20 世纪 20 年代，对于全纯域及其间的映射进行了更深入的研究。1921 年，莱因哈特（Reinhardt，Karl）引进莱因哈特域，1930 年，嘉当引进圆域（*domaines cercles*）（在比为 α（$|\alpha|=1$）的位似变换下稳定并含有原点的域），这是莱因哈特域的推广。1930 年他证明解析映射的唯一性定理：设 D，D' 为圆域，其中至少一个为有界域，

$$f: D \longrightarrow D'$$

为把原点映到原点的全纯同构映射，则 f 是线性映射。

对于 α 维有界圆域，他推广图仑（Thullen，Peter，1907—）分类莱因哈特域的工作，得出有界圆域到自身的一一

解析变换均为保原点变换，除非它是莱因哈特域或域 Δa，其中

$$\Delta a \quad (a \in (0, 1))$$

由三个不等式

$$|x|<1,$$

$$|y|<1,$$

$$\left|\frac{y-x}{1-\bar{y}x}\right|<a$$

定义。他证明若 $a \neq b$，则 Δa 和 Δb 之间不存在一一解析对应。而且所有 Δa 均为全纯域。对于两变元有界圆域，他还完全定出其自同构群。另外他还引进半圆域及反圆域，并证明相应的部分结果。1932 年，他证明另一个一般定理：C^n 中有界域的全纯自同构群是（实参数）李群。同时证明紧复解析簇的自同构群也是李群。

与单复变的情形不同，两个单连通的域不一定双全纯等价（存在一对一的保角或共形映射）。庞加莱早就指出，二维复数空间 C^2 中球体

$$|Z_1|^2+|Z_2|^2<1$$

与双柱 $|Z_1|<1$，$|Z_2|<1$ 之间不存在双全纯映射，这由它们的解析自同构群不同即可看出，也知道 C^n 中存在单连通的全纯域，它没有非平凡的自同构。

C^n 中的全纯域是 20 世纪上半叶多复变函数论最基本的研究对象。所谓全纯域 G 是指其上存在解析函数 f，使 f 可以解析开拓到其上最大的域（也称正则域），对全纯域加以刻画并进行分类是最基本问题之一。第一个刻画是所谓列维问题，1911 年列维（Levi，Eugenio Elia，1883—1917）用多重亚调

和性定义域 $G\subset C^n$ 的伪凸性。设 d_G（E）为域中点 E 到边界距离，如

$$u=-\log d_G$$

在 G 内为多重次调和函数，则称 G 是伪凸的，全纯域是伪凸域。反过来，伪凸域是否全纯域是极难的列维问题。1953—1954 年才由日本数学家冈洁等完全肯定地解决。嘉当只是得出特殊情形的结果，而在列维问题解决之前，嘉当在 1931 年最先得出全纯域的另一个刻画。他首先定义域的全纯凸性，$G\subset C^n$ 称为全纯凸，如对所有紧集 $K\subset G$，K 的全纯包

$$R=\bigcap_{f\in H(G)}\{Z\mid |f(y)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|\}$$

是 G 的紧集。1932 年他和图仑证明著名的嘉当—图仑定理：C^n 中域 G 是全纯域当且仅当它是全纯凸的。由此可推出全纯域是伪凸域。这样可以用全纯凸性来刻画全纯域。但由全纯凸性过渡到伪凸性又经历了 20 年。冈洁在 1942 年证明 $n=2$ 的情形，到 1953 年才证明一般情形。1954 年诺盖（Norguet, Francois, 1932—）及布列莫曼（Bremermann, Hans Joachim, 1926—）也独立证明同样结果，至此列维问题完全解决。

库辛问题是给定极点及零点造出相应亚纯函数的问题。库辛第一问题是米塔格—莱夫勒问题的推广，P·库辛（Cousin, Pierre, 1867—1933）在 1895 年解决了 $G=G^n$，或

$$\prod_{j=1}^{n}G_i\subset C^n$$

时的第一问题。冈洁 1935 年证明对所有全纯域可解。1938 年嘉当举出第一个非全纯域而库辛第一问题有解的例子，他用的是罗朗（Laurent, Pierre Alphonse, 1813—1854）级数，这个方法后来被他的学生多次用于解更一般情形。

库辛第二问题是魏尔斯特拉斯定理的推广。到1953年才由冈洁给出可解条件。不过他的方法及表述只有经嘉当及塞尔才直接迈入现代多复变时期。

1945年，嘉当由J·勒瑞处听到绯索的概念，但是当时没有实际应用。嘉当在1950年首先把绯索的概念引进多复变，在1951—1952年的讨论班上又引进凝聚绯索的概念。1952年他同塞尔的讨论，引出来著名的定理A和B，于1953年正式发表，它们成为以后多复变发展的出发点。首先，他定义施坦因流形，它是全纯域的推广，然后他证明关于施坦因流形的定理A和B。

定理A 如果X是施坦因流形，F为X上凝聚解析绯索，则对于所有$x \in X$，$H^{\circ}(x, F)$在F_X中的象生成Q_X模F_X。

定理B 如果X是施坦因流形，F为X上凝聚解析绯索，则对所有正整数q，上同调群$H^q(X, F)$均为0。

由此可以推出，对施坦因流形X，库辛第一问题总有解。

同年，他与塞尔证明另一基本定理：如X是紧复解析流形，F是凝聚解析绯索，则H^q（X，F）是有限维复向量空间，同样结果还可推广到紧解析空间。它是格劳尔特著名的直接象定理（在全纯真映射下凝聚解析绯索的直接象也是凝聚绯索）的出发点。另外他证明了施坦因流形上主纤维空间的基本定理。

3.2 复流形

微分流形上的几何结构除了黎曼结构之外，当属复结构。在数学分析中，实分析和复分析都很重要，也发展得相当成熟。在定义微分流形的图册中，如果两坐标图都是解析相关

的，则它定义一个实解析结构，如果偶维微分流形 M^{2n}，它的两个复坐标图册都与复解析相关，则它上面定义一个复解析结构。

实解析流形自然存在光滑即 C^{∞} 结构，反过来惠特尼证明任何一个仿紧微分流形上也可以定义一个实解析结构，而这个实解析结构诱导出原来基础的光滑结构。而且这样定义的实解析结构都是等价的。

对于复结构，情形就远为复杂。复流形 M^{2n} 上当然可以确定一个基础的实解析结构，但反问题则极为困难：在实解析流形 M^{2n} 上是否存在复结构？如果存在它是否唯一？这问题只有在简单的情形下才有解答。

(1) 对于实解析的二维连通流形 M^2，其上存在复结构当且仅当 M^2 是仿紧且可定向。对于闭二维流形，这些流形的分类归结为拓扑分类（它是显然的）以及参模的结构。

(2) 对于实解析四维连通流形，其上复结构的情况有如下 3 种：

①没有复结构，如四维球面 S^4。

②有唯一的复结构，如复射影平面 CP^2。

③有多种不等价的复结构，如 $S^2 \times S^2$。

这样我们的兴趣主要是紧、连通复流形。

由于紧、连通复流形上，除常数以外的全纯函数不存在，其上的分析相对简单，它的研究多依赖于几何、拓扑和代数结构的研究。

紧、连通复流形 X 的代数不变量是 X 上亚纯函数全体构成的域 $K(X)$，$K(X)$ 在复数域 C 上是有限扩张，其超越次数 $d \leqslant$ 复维数 n，而且 $K(X)$ 的元素之间函数无关当且仅当它们代

数无关。

在微分流形的微分结构和复结构之间可能存在一种近复结构，也就是(1,1)型张量场 J，它可看成向量场的线性变换，满足 $J^2=-1$。复流形 X 上当然也有这种结构，另外复流形上的黎曼度量 g 如果满足

$$g(x,y)=g(Jx,Jy),(x,y\text{ 为 }X\text{ 上向量场})$$

时，则 g 称为 X 上的埃尔米特度量。这时

$$\Omega=g(Jx,y)$$

是斜对称二阶张量场，称为 g 对应的基本形式。而当 $d\Omega=0$，这样的埃尔米特度量称为 X 上的凯勒（Kähler, Erich, 1906—）度量，具有这种度量的复流形，叫做凯勒流形。凯勒流形的重要性在于射影代数簇都是凯勒流形。但反过来凯勒流形不一定是代数簇，最典型的例子是复环面。另一方面，也存在非凯勒流形的复流形，例如霍普夫流形。

复流形主要的具体结果见于复解析曲面。复解析曲面中一大类是代数曲面，小平邦彦在分类代数曲面的基础上，在20世纪60年代完成了对复解析曲面的粗分类。

由于 $K(X)$的超越次数 $d\leqslant$复维数2，因此复解析曲面有三大类：

$d=2$，X 是射影空间的代数曲面。

$d=1$，X 是代数曲线上椭圆曲线丛（具有有限多例外纤维）。

$d=0$，X 上如无例外曲线，则 b_1 只能取三个值：

$b_1=4$，X 是复环面；

$b_1=0$，X 是$K3$ 曲面，它们都互相同胚；

$b_1=1$，X 是霍普夫曲面等。

进一步分类可以用到饭高茂（Iitaka, Shigeru, 1942—）在1970年定义的小平维数 K（X）。对复曲面它可以取值0，1，2以及 $-\infty$。这样即可用 K 以及广义的代数几何不变量，几何亏格 P_g，多亏格 P_{12}，非正则数 q 以及拓扑不变量 b_1 把解析曲面加以分类。

解析曲面极小模型分类

K	P_g	P_{12}	q	b_1	
2		>0			一般型代数曲面
1					一般型椭圆曲面
0	1	1	2	4	复环面
	1	1	2	3	具有平凡典范丛的椭圆曲面
	0	1	1	2	超椭圆曲面
	0	1	1	1	属于Ⅶ类的椭圆曲面
	1	1	0	0	$K3$ 曲面
	0	1	0	0	恩瑞克斯曲面
$-\infty$	0	0	0	0	有理曲面
			$\geqslant 1$	$2q$	亏格为 q 的直纹曲面
			1	1	Ⅶ类曲面

值得注意的是，许多复解析曲面一般不是代数曲面，解析曲面是代数曲面的充分必要条件是在其上存在两个代数无关的亚纯函数，典型的有：

（1）复环面 T^2（C），它是高维空间 C^2/Γ、Γ 是 C^2 中一个格，T^2（C）作为微分流形微分同胚于实四维环面

$$T^4 \approx S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1,$$

但 T^2（C）的复结构依赖于格 Γ。

（2）霍普夫曲面 H，它是微分流形 $S^1 \times S^3$ 上一个非代数的复结构。设 $Y = C^2 - \{0\}$，$c>0$，考虑 G 在 Y 上作用

$$(Z_1, Z_2) \longmapsto (c^k Z_1, c^k Z_2), k \in Z,$$

G 在 Y 上作用没有不动点，则 $H = Y/G$，H 上有由 Y 诱导出的自然复结构，但它不是代数流形。

通常的复流形概念不能概括有奇点的簇，因此有必要加以推广。在 1951—1952 年讨论班上，嘉当首先尝试定义解析空间。在 1953—1954 年讨论班上，他正式引入“环式空间”(*espace annelé*)，从而定义正规解析空间。1958 年，他证明正规解析空间可以嵌入在 C^n 之中。对于一般的解析空间，1960 年嘉当给出它模一个不连续群所得的商簇仍为解析空间的条件。

4 代数几何学

4.1 前史

代数几何学的对象原来是欧氏平面中的代数曲线，即由多项式

$$P(x, y) = 0$$

定义的轨迹，以及三维欧氏空间中的代数曲线及曲面，后来推广到高维欧氏空间中的代数方程组所定义的代数簇，即由多项式方程组

$$\begin{cases} P_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0, \\ P_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0, \\ \quad \cdots \\ P_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$$

定义的 n 维空间中的轨迹——公共零点。

最简单的代数曲线——直线和圆各民族都有认识。古希腊已经知道圆锥曲线和一些三次、四次代数曲线，但系统研究还是从 17 世纪解析几何学创立后进行的。解析几何学对于二次代数曲线和曲面已有相当完整的结果，从牛顿开始已着手对于三次代数曲线进行分类，得出 72 类，后来又经过别人补充并开始四次代数曲线的分类。这种分类由于过分繁琐而无法进行下去，这推动解析几何学向代数几何学过渡，也就是在更粗糙

的水平上进行分类和进行更一般的理论研究。

18 世纪，代数几何学的基本问题是曲线和曲面的交截问题，这在代数学上是消去法问题，这时得到最基本的定理是贝祖（Bezout，Etienne，1739—1783）定理。随着 19 世纪射影几何学的兴起，开始用射影几何方法研究代数曲线，其中引进无穷远点及虚点以及用齐次多项式及射影坐标

$$P(X_0, X_1, X_2)=0$$

来表示代数曲线，特别是坐标也从实数扩张到复数。德国数学家普吕克尔在 1834 年得出平面曲线的普吕克尔公式，它联系平面代数曲线的次数、类数、二重切线数、拐点数等等，特别由此证明一切三次曲线均有 9 个拐点。1839 年他发现四次曲线有 28 条二重曲线，其中至多 8 条是实的。

代数几何学的产生应该说从黎曼开始。黎曼的函数论方法极大地促进了代数几何学的发展，它把代数曲线作为黎曼面上的函数论来研究，黎曼更引进第一个双有理变换不变量——亏格，开辟了代数几何学新的一章。他和他的学生洛赫得出黎曼—洛赫定理是代数曲线的基本定理，也是各种推广的出发点。黎曼还引进参模的概念，证明亏格为 g（$g\geqslant 2$）的非奇异不可约代数曲线的双有理等价类依赖于 $3g-3$ 个复参数。黎曼去世之后，他的成就为各种流派所继承。首先是德国数学家克莱布什（Clebsch，Rudolf，1833—1872）重新把黎曼用函数论方法得到的改写成代数曲线的结果，而他的学生 M·诺特（Noether，Max，1844—1921）则是代数几何方向的首创者，他在 1871 年首次证明平面代数曲线的奇点解消定理，1874 年和布瑞尔（Brill，Aleander，von，1842—1935）合作，引进线性系的概念，给黎曼—洛赫定理一个代数的证明。1882 年 M·

诺特和法国数学家哈尔芬（Halphan，Georges Henri，1844—1889）把他们的工作推广到空间代数曲线上。同年，诺特给出三维射影空间内代数曲线分类的表，戴德金和韦伯开辟了以理想为基础的代数方向，而克洛耐克则开辟了以除子为基础的算术方向。

到 19 世纪中叶，代数曲面只有零散的特殊结果。1849 年，英国数学家萨尔孟（Salmon，George，1819—1904）和凯雷证明在没有奇点的三次代数曲面上存在 27 条直线。一直到 1868 年克莱布什才从双有理变换观点讨论代数曲面。他定义第一类重积分，并证明其线性独立的最大数目是双有理不变量，称为几何亏格 P_g，它与凯雷在 1869 年由另外途径引进的算术亏格 P_a 一般并不相等（1871 年措玉登（Zeuthen，Hierongmus Georg，1839—1920）及诺特在 1875 年证明其双有理不变性）。从 1870 年起，M·诺特发展了他的思想，他还引进曲面的线性亏格 $P^{(1)}$，并研究曲面上代数曲线得出曲线亏格公式。他还引进例外曲线的概念。

从 19 世纪 80 年代末起，意大利的代数几何学派继承了 M·诺特等的几何思想，开始对代数几何学，尤其是代数曲面进行研究，其主要代表人物是卡斯泰努沃（Castelnuovo，Guido，1865—1952）、恩瑞克斯（Enriques，Federigo，1871—1946）和稍晚的塞梵利（Severi，Francesco，1879—1961），他们主要的结果是代数曲面的分类。头一个结果是贝尔梯尼（Bertini，Eugenio，1846—1933）在 1877 年给出平面对合变换的分类。1893 年，卡斯泰努沃解决了吕略特（Lüroth，Jacob，1844—1910）问题，1896 年他提出并解决用数值不变量刻画有理曲面的问题。代数曲线是有理曲线的充分且必要条件是亏

格为0，而对于曲面则有多种不变量，除了 P_g，P_a，$P^{(1)}$之外，还有恩瑞克斯引进的多亏格 P_k（$k \geqslant 2$）。与曲线的情形不同，$P_g = P_a = 0$ 还不足以保证代数曲面是有理曲面，要保证这点的充分必要条件是 $P_g = P_2 = 0$。恩瑞克斯给出曲面是直纹曲面（直线与一个亏格为 g 的曲线的乘积）的充分必要条件是 $P_4 = P_6 = 0$。另外还发现一些特殊的曲面，最主要的是恩瑞克斯六阶曲面和 $K3$ 曲面。$K3$ 曲面的一个特殊情形是1864年库默尔引进的具有16个二重点的四阶库默尔曲面。这一切都导致恩瑞克斯在20世纪初一系列论文中对于曲面的分类。1914年，由 P_{12}的不同分成四大类。意大利学派这方面的成果总结在1949年出版的恩瑞克斯的《代数曲面》一书中。

与意大利学派大约同时的是法国数学家使用的超越方法，从某种意义上来讲，这是黎曼研究代数曲线观点的直接继续，只不过把单变量代数函数论推广成两个变量代数函数论，即由三个复变量的不可约多项式 $P(x, y, z) = 0$ 定义的代数函数。黎曼研究的黎曼面的拓扑结构和黎曼面上的有理函数及阿贝尔积分都被庞加莱及毕卡推广到代数曲面上，但是代数曲面的情形要复杂得多。毕卡在1899年发展了第二类二重积分理论，不过其线性独立的数目与亏格无关。

4.2 抽象代数几何学

古典代数几何学主要研究三维复射影空间 CP_n 中的代数曲面和代数曲线，实际上与复分析不可分。但是无论从理论上还是从应用上讲，都要求对代数几何学做推广。例如把基本定理，即黎曼—洛赫定理推广到代数曲面及高维代数簇上，多个代数簇的交截问题，舒伯特（Schubert，Hermann，1848—

1911）的计数几何的严密基础问题（这是希尔伯特第 15 问题）等，尤其是许多数论问题更要求有限域的求解，这些都促使代数几何学的抽象化。从 20 世纪 30 年代起，抽象代数学、代数拓扑学、微分几何学的发展为代数几何学的抽象化提供了许多新工具。

抽象代数几何学来源于把代数簇与交换环的理想对应起来。给定一组复系数多项式

$$f_a \in C[X_1, \cdots, X_n],$$

其实也就是给定多项式环$C[X_1, \cdots, X_n]$中由 f_a 生成的理想J，它对应 f_a 的公共零点的轨迹

$$X = V(J)。$$

反过来，如 $X \subset C^n$ 是代数簇，我们令

$$I(X) \subset C[X_1, \cdots, X_n]$$

为在 X 上为零的多项式理想，这样我们在理想和代数簇之间就有下面的双边对应

$$\{C^n \text{ 中的子代数簇}\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftharpoons}} \{C[X_1, \cdots, X_n]\text{中的理想 } I\}。$$

但是，这个对应不是一一对应：I 和 V 在一个方向合成是恒同映射，在另一方向就不是。具体说来，如 $X \subset A^n$，则

$$V(I(X)) = X,$$

但反过来，对于理想 J，一般

$$I(V(J)) \neq J,$$

而且映射 $I \cdot V$ 一般既不是内射也不是满射，可是 $I \cdot V$ 的象正好是理想J 的根基，即 rad J，

$$I(V(J)) = \text{rad } J。$$

它是在 J 的公共零点的轨迹上为零的函数所生成的理想，这样

我们最终有一个一一对应

$$C^n \text{ 中的子簇 } X \longleftrightarrow C[X_1, \cdots, X_n] \text{ 中的根基理想 rad } J。$$

这样一来，我们就可以通过交换环的理想理论来研究代数簇了，这是继笛卡尔第一次几何代数化之后，第二次几何代数化，只不过这次代数化的代数已不是经典数学的代数而是结构数学中的抽象代数结构了。

设 $X \subset C^n$ 为一个代数簇，$I(X)$为其理想，商环

$$A = A(X) = C[X_1, \cdots, X_n]/I(X)$$

称为 X 上正则函数环或 X 的坐标环。由此我们可得到 $J = \text{rad } J$的一个充分必要条件，即商环

$$C[X_1, \cdots, X_n]/J$$

不含幂零元素。

由于 X 是多项式$f \in I(X)$公共零点的轨迹，因此 X 由 A 完全决定。实际上 X 的任何几何性质都可以表示为 A 的代数性质。例如，X 的一点就是 $A(X)$中的一个极大理想，两个代数簇 X, Y 之间的映射就是 C 上的环同态

$$A(Y) \longrightarrow A(X)。$$

这样我们把代数几何学转变成交换环的理论而成为结构数学的有机组成部分。不仅如此，我们还可以把复数域 C 换成为任何代数封闭域，特别是有限域 F（q）的代数封闭域。

代数几何学由经典到抽象的过程大致分为四个阶段：

（1）双有理几何时期（1870—1920）

这时期确立的代数几何学的目标是：引进双有理不变量，通过双有理变换解消奇点，证明不变量之间的关系主要是黎曼—洛赫定理，然后在双有理意义下把代数簇加以分类，这通过意大利几何学派在分类代数曲面上达到尽头。

（2）抽象代数几何学时期（1920—1955）

20世纪20年代，由于E·诺特抽象代数学的发展，范·德·瓦尔登首先把抽象代数学引进代数几何学，特别是使得代数几何学严密化。查瑞斯基从1930年继莱夫谢兹之后把拓扑工具引入代数几何学，同时他还用交换环理论改造代数几何学。其后主要是魏伊完成了抽象代数几何学，这意味着：

①由复数域到一般特征0的代数闭域到更一般特征 p 的域。

②代数簇内在的定义，而不依赖外围的复射影空间。

（3）概形时期（1955—）

格罗登迪克把代数几何学发展为一般的概形理论，使代数几何学成为交换代数的一部分，这还为非交换代数几何开辟道路。

（4）结构统一时期（1975—）

1975年以后，代数几何与拓扑、微分几何、复几何乃至物理形成了大统一的局面，彼此相关、互相促进。特别是由于规范场理论的引入，四维流形的拓扑取得重大突破，同时使代数曲面理论对四维拓扑产生积极影响。

下面我们就5个主题稍稍论述一下。

1．双有理几何学

由于双有理变换的引入，完成了解析几何学到代数几何学的转换。解析几何学通常使用线性变换，得出过细的分类（三次平面曲线可达几十种上百种），反而掩盖了几何上的本质区别。以双有理变换不变的几何性质为基础，可以得出更深刻的几何分类。

研究代数簇的双有理变换的首要问题是确定双有理不变

量。对于平面代数曲线，双有理不变量主要是亏格及参模。由于双有理不变量必定是射影不变量，因此，首先要解决如何把它表为射影不变量的问题。黎曼通过引进伴随曲线，已经把亏格 g 表为代数方程次数与重点数目的函数，不过他没有用齐次方程，因此并非射影表示。1870 年 M·诺特假定 n 次射影代数曲线只有通常奇点，即 r_j 阶重点处有 r_j 条不同的切线，这样他得出一般亏格公式

$$g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}r_j(r_j-1),$$

因此，如代数曲线没有奇点，则亏格

$$g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)。$$

而要想没有奇点就要进行奇点解消。

双有理变换不仅是代数簇分类的基础，而且是奇点解消的手段。代数函数论中的黎曼曲面对应的代数曲线是光滑的或者说是没有奇点的，但一般的代数曲线乃至一般的代数簇是有奇点的。代数几何学中的一个基本问题是奇点解消，也就是，通过双有理变换把一个有奇点的代数簇变换成没有奇点或仅有“好”奇点的代数簇。

对于复射影空间中的不可约平面代数曲线，情况最为理想，通过双有理变换总可以把奇点完全去掉，使得它成为光滑的代数曲线。由于它是复一维的，它的几何形象就是通常二维的光滑闭曲面。这样代数曲线的几何图象完全反映在这些光滑闭曲面的几何形象之中。

2. 奇点解消

拿代数曲线来讲，它上面的点一般来说大多数是常点，个别的是奇点。比如有的曲线（如双纽线）自己与自己相交，那

么在这一交点处，曲线就有两条不相同的切线，这样的点就是普通的奇点。有时，这两条（甚至多条）切线重合在一起（比如尖点），表面上看起来好像同常点一样也只有一条切线，而实际上是两条切线（或多条切线）重合而成（好像代数方程的重根），这样的点称为二重点（或多重点）。对于代数曲面来说，奇点就更为复杂了。奇点解消问题，顾名思义就是把奇点分解或消去，也就是说通过坐标变换的方法把奇点消去或者变成只有最简单的奇点。这个问题的研究已有上百年的历史了。而坐标变换当然是我们比较熟悉的尽可能简单的变换，如多项式变换或有理式变换。而行之有效的最简单变换是二次变换和双有理变换。很早就已经证明，代数曲线的奇点可以通过双有理变换予以解消。从 19 世纪末起，许多数学家就研究代数曲面的奇点解消问题，但是论述都不能算很严格。问题是通过变换之后，某个奇点消去了，是否还会有新奇点又生出来呢？一直到 20 世纪 30 年代，沃克和查瑞斯基才完全解决代数曲面的奇点可以解消这个问题。不久之后，查瑞斯基于 1944 年用严格的代数方法解决了三维代数簇问题。高维的情况就更加复杂了。广中平祐运用许多新工具，细致地分析了各种情况，最后用多步归纳法才最终完全解决这个问题。这简直是一项巨大的工程。它不仅意味着一个问题圆满解决，而且有着多方面的应用。

3. 黎曼—洛赫定理

1951 年小平邦彦把代数曲线的黎曼—洛赫定理推广到代数曲面情形，把原来意大利数学家的不等式变成等式。照这样推广下去到高维存在许多困难。德国数学家希采布鲁赫当时在普林斯顿高等研究院同小平邦彦的讨论得知塞尔了解如何把黎

曼—洛赫定理中的不变量用上同调来表示，从而得出一般代数簇的黎曼—洛赫定理的表达式。1953 年底又知道托姆的配边理论，于是在 1954 年一举证明一般情形的黎曼—洛赫定理。1958 年格罗登迪克又推广到更一般的情形，最后纳入阿提雅—辛格指标定理。

4．抽象代数簇

虽然从 20 世纪 30 年代起，范·德·瓦尔登在十几篇论文中已经为代数几何学一些概念（如“一般点”）给出了严密的定义，但“交截重数”的概念仍然成问题，魏伊解决了这个问题。他还把定义域由复数扩充到一般的代数封闭域（特别是特征不等于 0 的域，从而为数论问题的解决打通道路）。他还第一次把代数簇的概念由射影空间中解放出来，也就是给出一个“内在的”定义，相应地对于代数簇的其他概念也做了推广。1949 年魏伊又把纤维空间概念引进理论当中。

魏伊完全从新的观点定义代数簇。过去，代数簇是实数或复数域上代数方程组的零点集。魏伊一方面推广到任意域，另一方面用几何的方法内蕴地定义代数簇，而不依赖外围的射影空间。他定义完全簇的概念，证明古典复射影空间中的代数簇均是完全的。他认识到查瑞斯基拓扑在定义抽象簇中的重要作用。为了在数论上的应用，他还考虑不可分扩张的情形。他的《代数几何学基础》完全避开了古典分析的语言及方法。更一般的代数簇来源于 1956 年塞尔的工作。塞尔把多复变函数论中绯索的语言引到抽象代数簇上，把抽象代数簇定义为环式空间，这样代数簇成为具有查瑞斯基拓扑的拓扑空间，从而可以建立上同调理论，这样可以给出算术亏格等古典不变量一个上同调解释。1958 年，格罗登迪克定义了比代数簇远为一般的

概形概念。

5. 阿贝尔簇理论

阿贝尔簇理论是阿贝尔函数论的推广及抽象。魏伊的数论工作都是与阿贝尔簇相关。1948 年魏伊在《阿贝尔簇和代数曲线》中正式提出阿贝尔簇的理论，他的贡献一是把定义域从复数域 C 推广到任意代数闭域 k，二是把原来的解析理论发展为代数理论，对阿贝尔簇他做了奠基性工作，证明一系列基本定理并应用于数论。1952 年构造毕卡簇，1954 年证明抽象阿贝尔簇的射影嵌入定理，其中证明重要定理：设 X 是阿贝尔簇 A 上正除子，则存在正整数 n，使 nX 的类为丰富的充分必要条件是 X 非退化。1955 年引进极化及主极化的概念，它们是区分雅可比簇与一般阿贝尔簇的关键。

4.3 代数曲线

经典的代数几何学所研究的曲线是

$$f(x, y)=0,$$

或者加入无穷远点得到齐次方程

$$f(x, y, z)=0,$$

(x, y, z)是射影平面的齐次坐标。如 f 是不可约而且非奇异(即对于$(x, y, z)\neq 0, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$不同时为 0)，曲线可以由一个复变元来参数化，例如$\frac{x}{y}$或$\frac{y}{z}$就可以。这样，代数曲线成为紧黎曼面或一维复解析流形。按照结构数学观点，下面三个理论实际上是一回事：

(1) 代数曲线；

(2) 紧黎曼曲面；

（3）一变元代数函数域。

它们分别代表同一个对象的几何的、分析的、代数的方面。几何的和代数的观点都已经相当的结构数学化，但是分析的观点从历史上来讲，是最长的，也是最具体的。它的最自然的问题是：在紧黎曼面上有多少全纯和亚纯函数?

对于全纯函数，根据刘维尔定理，没有常数以外的全纯函数。

对于亚纯函数，由于任何亚纯函数都是（x，y）的有理函数，这就多得很了。一个定量的问题就是这些亚纯函数有多少是线性独立的。当然这还必需指定不同的极点及其上给定的重数，如 P_1，…，P_r 是黎曼面上不同的点。若 n_1，…，n_r 为正整数，我们考虑所有在 P_i 上有$\leqslant n_r$ 阶的极点的亚纯函数 φ，它没有任何其它极点，这样我们可以形式地定义除子

$$D=\sum_{i=1}^{n} n_i P_i,$$

而 H（D）是上述所有 φ 的空间，则

$$h(D)=\dim H(D)\leqslant 1+d,$$

其中 $d=\deg D=\sum\limits_{i=1} n_i$，当黎曼面为 S^2 时，等式成立；而当黎曼面的亏格$\geqslant 1$ 时，我们得到著名的代数曲线的黎曼—洛赫定理：

$$h(D)=1+d-(g-i(D)),$$

其中 $i(D)$为 D 的特性指数，即在 D 上为零的独立全纯微分的数目（即在 P_i 的零点阶数$\geqslant n_i$）。因此

$$0\leqslant i(D)\leqslant g,$$

全纯微分的零点总数恒为 $2g-2$，因此当

$$\deg D>2g-2$$

时，则

$$i(D)=0。$$

1. 代数曲线的分类

代数曲线 C 的不变量一是数值不变量亏格，二是参模。亏格有很多的表现，这是后来推广的基础。

(1) $g=$ 环柄数 $=\frac{1}{2}b_1$，这是拓扑定义。

(2) $g=\frac{1}{2}(c_1-2)$，c_1 是陈数，这是微分几何定义。

(3) $g=\dim H^1(C,\mathcal{O}_C)$，这是由 C 上全纯函数芽的绯索，这是复几何的定义。

(4) $g=1-P_c(o)$，$P_c(t)$ 是希尔伯特多项式，这是环论的定义。

(5) $g=H^0(C,\Omega_c^1)$，即 C 上第一类阿贝尔积分全体构成复数域上向量空间的维数，这是复分析的定义。

(6) $g=\deg D+1-l(D)+l(k_c-D)$，这是代数几何学的定义。

(7) $g=1-n+\frac{W}{2}$，这是单变元代数函数论的定义。

(8) $g=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-r$，这是古典几何双有理不变量的定义。

代数曲线粗分类完成之后，细分类就是参模问题。对于 $g\geqslant 2$ 的代数曲线，双有理等价类依赖于 $3g-3$ 个复参数。这些等价类构成一个 $6g-6$ 维空间，其结构十分复杂。

1965 年，美国数学家曼福德（Mumford, David, 1937—）证明，任意代数闭域亏格为 g 的代数曲线的参模空间 M，具有抽象代数簇（概形）结构。1969 年德林（Deligne, Pierre,

1944—）及曼福德证明 M_g 是不可约拟射影代数簇。塞梵利曾猜想它们是有理的，并证明 $g\leqslant 0$ 时是有理簇的象，但曼福德等人证明 $g\geqslant 23$ 时非但不成立，而且参模还是一般型代数簇的。

与参模空间结构有关的变型理论于 1955 年由小平邦彦及斯宾塞（Spencer，Donald，1912—）系统给出。

2．雅可比簇

在研究代数曲线的问题时，常常用到“过渡到雅可比簇”的方法，因此，我们解释一下什么是雅可比簇。

首先每条复代数曲线对应一个黎曼曲面（它是复一维紧的复流形），曲面的孔洞数目就是它的亏格 g，因为它是一个复曲面，每一点的开邻域 u 都可以用复坐标片来表示，u 上的全纯微分形式局部可表示为 $f(Z)dZ$，其中 Z 是复参量，f 是全纯函数，它可沿着 u 中一条路径 r 进行积分

$$\int_r f(Z)dZ。$$

这些都同复变函数论中所学的没有什么不同。但是现在的复流形上不止一个复坐标片，这个黎曼面因为紧，总可以找有限多个复坐标片 u_1，u_2，…，u_s 来覆盖它。一个全纯微分形式如果在两复坐标片的交 $u_i\cap u_j$ 中都相等，那么我们就可以定义整个黎曼面上的全纯微分形式，这样黎曼面上所有全纯微分形式的集合构成一个复数域上的线性空间 $\Omega(X)$，它的复维数正好等于亏格 g，我们可以把它的基定义为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g$。

由于对于黎曼面上每一条闭轨道 r，我们就有积分

$$\int_r \omega,$$

而且如果两条轨道 r_1,r_2 同伦，即 r_1,r_2 互相连续变形，则

$$\int_{r_1}\omega=\int_{r_2}\omega。$$

因此，我们可以定义从闭轨道的等价类空间 $H_1(X,Z)$ 到 $\Omega(X)$ 的对偶空间上的周期映射

$$p:H_1(X,Z)\longrightarrow\Omega'(X)。$$

这里对偶空间就是线性空间上所有线性泛函构成的线性空间。可以证明，p 是一一的映射，p 的象在 $\Omega^1(X)^*$ 中构成一个格子 Λ，它由

$$\int_r\omega_i$$

构成，因此 Λ 称为周期格，而 g 维复环面

$$\Omega^1(X)^*/\Lambda$$

称为 X 的雅可比簇，记作 $Jac(X)$。雅可比簇有非常好的性质，主要是：

(1) 雅可比簇是 g 维复环面。

(2) 雅可比簇是阿贝尔簇，即它既是代数簇又是阿贝尔群。具体讲，如 X 是定义在 K 上亏格为 g 的代数曲线，则 Jac (X) 可嵌入在 l^g-1 ($l\geqslant3$) 维的复射影空间之中，而且直接可用黎曼的 θ 函数写出来。

(3) 每条代数曲线也就是它的黎曼曲面都可以全纯嵌入到其雅可比簇当中。

(4) 在雅可比簇上存在一个正定埃尔米特型 H，使 $E=ImH$ 在 Λ 上取整数值（Im 代表 H 的象）。

所谓埃尔米特型为双线性型

$$H:\Lambda\times\Lambda\longrightarrow C,$$

满足

$$H(x,y)=\overline{H(y,x)},$$

其中“——”表示复共轭，正定是指对非 0 的 x 有

$$H(x,x)>0。$$

这种埃尔米特型称为阿贝尔簇的非退化黎曼型，或称它的一个极化。如果进一步

$$E = ImH: \Lambda \times \Lambda \longrightarrow Z$$

是么模的，则称为主极化。具有主极化的阿贝尔簇，显然任意代数曲线的雅可比簇是主极化阿贝尔簇。反过来，不是任何主极化的阿贝尔簇都是某曲线的雅可比簇。究竟什么样的主极化阿贝尔簇有资格当雅可比簇，这是当前代数几何的一大重要的未完全解决的问题——所谓肖特基(1935)问题，它已有100多年的历史，最近已取得重大突破。

托雷里（Torelli, Rènati, 1884—1915）定理：一个代数曲线唯一决定其雅可比簇，反之，一个雅可比簇带有某主极化也唯一决定曲线或黎曼面的同构类。也就是具有相同主极化的雅可比代数曲线本质上是一样的。由此可见，具有丰富结构的雅可比簇乃至更一般的阿贝尔簇对于研究代数曲线的用途。

4.4 代数曲面

代数曲面的数值不变量和粗分类都要比代数曲线复杂，它几乎经历近百年的时间才基本解决。代数曲面与代数曲线差别很大，例如，存在不止一个数值不变量，存在不是代数曲面的解析曲面等等。

代数曲面的几何亏格 P_g 是代数曲线亏格 g 的推广，另外还有算术亏格 P_a，$P_g - P_a \geqslant 0$，$P_g - P_a$ 称为非正则数 q，代数曲面的不变量还有线性亏格 $P^{(1)}$，也常有典范类 K 的自交截数（K^2）表示

$$P^{(1)} = (K^2) + 1,$$

它不是双有理不变量。

另一个不变量是多亏格 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{12}, \cdots (P_1 = P_g)$。$P_n$ 是双有理不变量。

代数曲面 S 的拓扑不变量有

$$b_0 = b_4 = 1, b_1 = b_3,$$

从而欧拉示性数 $\chi = 2 - 2b_1 + b_2$。

$$P_a(s) = -\dim H_1(S, O_v) + \dim H^2(S, O_v)$$
$$= \chi(S, O_v) - 1,$$
$$q(s) = \dim H^1(S, O_v)。$$

用凝聚绯索上同调还可以定义另一类不变量

$$h^{p,q} = \dim H^q(S, \Omega_S^p), 0 \leqslant p + q \leqslant 2,$$

其中 Ω_S^p 是 S 上 p 次微分形式的绯索，我们有如下关系：

$$h^{p,q} = h^{2-p,2-q},$$
$$h^{p,q} = h^{q,p},$$
$$b_1 = h^{1,0} + h^{0,1},$$
$$b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}。$$

对此，有：

M·诺特公式

$$\frac{(K^2) + X}{12} = 1 - h^{0,1} + h^{0,2}。$$

它也可用非奇异代数曲面的陈类表示，即

$$\frac{C_1^2 + C_2}{12} = 1 + P_a。$$

我们举一些例子。

射影代数曲面就是 CP^3 中的非奇异 m 次曲面，由 d 次齐次多项式

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$$

定义，

$$b_1 = h^{1,0} = h^0 = 0,$$

$$b_2 = d^3 - 4d^2 + 6d - 2,$$

$$x = d^3 - 4d^2 + 6d,$$

$$q = 0,$$

$$(K^2) = d(d-4)^2,$$

则

$$P_a = P_g = \frac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)。$$

二次曲面、三次曲面均为有理曲面，它们的 $P_a = P_g = 0$。二次曲面和 $CP^1 \times CP^1$ 双正则同构。三次曲面上有 27 条射影直线。CP^3 中四次曲面最多有 16 个二重点，而这样的曲面称为库默尔曲面。库默尔曲面 $P_g = 1$，$q = 0$，它是最原始的 $K3$ 曲面。

复代数曲面在双有理等价的意义下可以分成如下几类：

(1) 有理曲面

(2) 直纹曲面

(3) 二维阿贝尔簇

(4) $K3$ 曲面

(5) 椭圆曲面

(6) 一般型代数曲面

这种分类类似于代数曲线的分类：

(1) 有理曲面和直纹曲面对应于亏格为 0 的有理曲线。

(2) 二维阿贝尔簇，$K3$ 曲面，椭圆曲面对应于 $g = 1$ 的椭圆曲线。

(3) 一般型代数曲面对应于 $g > 1$ 的代数曲线，实际上 $g > 1$ 的代数曲线也可称为一般型代数曲线，它们具有比较复杂

的结构。

经过多年的研究，已经得到刻画定理，首先是查瑞斯基引入代数曲面的极小模型，并证明了下面的定理。

极小模型存在定理 除了直纹曲面以外，其它曲面都存在极小模型。

这样分类问题归结为刻画极小模型的问题，其中有些是19世纪已经得出的：

(1) 有理曲面：$P_a=0$，$P_2=0$。

(2) 直纹曲面：$P_{12}=0$。

(3) 二维阿贝尔簇：$P_{12}=1$，$P_g=1$，$P_a=-1$。

(4) $K3$ 曲面：$P_g=1$，$P_2=1$，$P^{(1)}=1$，$q=0$。

(5) 椭圆曲面：$P_{12}=0$，$P_g=1$。

(6) 一般型代数曲面：$(K^2)>0$，$P_{12}>1$。

对一般型曲面，我们有如下限制：

若 $n=(K_s^2), m=X(s)$，则

$$n>0, m>0, n+m\equiv 0(\mathrm{mod} 12),$$

并满足下列不等式：

(1)M·诺特不等式

$$P_a\leqslant\frac{1}{2}(K_s^2)+2。$$

由此得出，n, m 必须满足下列不等式：

当 n 为偶数，$5n-m+36\geqslant 0$；

当 n 为奇数，$5n-m+30\geqslant 0$。

(2)包哥莫洛夫—宫冈—丘不等式

$$n\leqslant 3m,$$

而且对于(n, m)满足 $5n-m+36\geqslant 0, n\leqslant 2m$，且 $n+m\equiv 0$

(mod12)，都存在极小曲面 S，使 $(K_S^2)=n$，$X(s)=m$，下列情形可能除外

$$n-2m+3k=0,\ k=1,2,3,5,7。$$

代数曲面的参模问题也有零星的结果。

高维代数簇的分类较为复杂。近年来，三维代数簇的粗分类已取得突破性的进展。

5 代数数论

1871年，戴德金建立系统的代数数论，他的理论框架至今仍然采用，这个框架对于结构数学的发展至关重要。其主要特点有：

(1) 原来的数论（不妨称为初等数论，但这里毫无贬义，例如本世纪数学最大成就之一——费尔马大定理可称为属于初等数论的命题），讨论的是有理数特别是整数的性质，它的目标是证明一个一个正整数的一般定理，例如四平方和定理：每一个正整数都可以表为4个或4个以下平方数之和，其中丝毫不涉及整数或有理数的集合。而代数数论几乎从一开始就考虑集合的整数性质，实际上就是结构。虽然它也有类似于初等数论的问题，但是这并非其主要目标。因此可以说代数数论从一开始就是结构数学的有机组成部分。而初等数论则不是，虽然后者有相当一部分依靠结构数学而取得重大突破，例如不定方程问题。但从对象上来讲，两者相去甚远，这种明显的差别决定两者的理论结构基本上不同。

(2) 对应初等数论的有理数、整数及素数三级结构，他建立起代数数论的三级结构：

有理数
|
整 数
|
素 数

我们先考虑个别的有理数特别是整数，然后考虑所有有理数的集合和所有整数的集合。显然，两个有理数相加、相减、相乘之后，仍然是一个有理数，两个有理数相除（0 不作除数）商也是有理数。而且加、减、乘、除满足交换律、结合律、分配律，还存在零元 0 和单位元 1 等等，满足这些条件的数的集合称为数域，有理数域是最标准的数域。

有理数域有一些元素称为整数，两个整数相加、相减、相乘仍是整数，但是两个整数相除一般就不是整数了。这样，整数的集合构成整数环。我们在其中加上一些元素（如$\sqrt{2}$）后构成代数整数环。对于代数数，我们有类似的三级结构：

代数数
|
代数整数
|
素 数

(3) 与以前的局部观点不同，他采用整体（或全局、或大范围）观点，即主要考虑集合而不是数，这样，他得出代数数域、代数整数环、理想和理想类群三级结构：

代数数域
|
代数整数环
|
理想和理想类群

加上他的公理化方法，这些成为后来抽象代数中相应概念的出发点。

(4) 他把数之间的关系（如被…整除，是…的倍数）系统

地表为集合论的语言（如包含于…中），这样，数论的定理主要表现为数学结构的定理。由于数的关系清楚而明确，这样使得代数数的结构理论成为抽象代数的一些分支，特别是交换代数的原型和主要依据，反过来结构数学的框架也使理论大大推广，形成丰富的内涵。

5.1 代数整数论

在 1871 年之前，代数数论只不过是“代数整数”的乘法理论，所谓代数整数是整系数多项式方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根 θ。狄利克雷、爱森斯坦、柯西和库默尔都把代数整数写成为

$$b_0 + b_1\theta + \cdots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad (1)$$

其中所有的 b_i 均为整数。但是，代数整数是通常整数的推广。整数不仅仅有加、减、乘的一方面，而且，它们还相除（分母不为 0）产生有理数。由 θ 和有理数经过加、减、乘、除之后，可以得出“代数有理数”，那么它们中间的代数整数是否完全具有（1）的形式呢？戴德金在狄利克雷的《数论讲义》第二版（1871）附录 X 中第一次明确提出这个问题，不过，答案是否定的，像库默尔的分圆整数情形实在是非常理想的。而一般情形，连二次代数数域都不对。

有趣的是，牛顿在他的《通用算术》（1707）一书中对于实二次代数数，已完全解决这个问题。设 D 为没有平方因子的正整数，则实二次代数整数，当 $D\equiv2$ 或 3（mod4）时，具有

$$m + n\sqrt{D},\ m,\ n \in Z$$

的形式，但 $D\equiv1 \pmod 4$ 时，整数具有

$$\frac{m+n\sqrt{D}}{2}$$

的形式，且 $m\equiv n \pmod 2$。不过到 19 世纪，牛顿的著作早被人遗忘了。

代数数论的早期研究对象为高斯整数、二次代数整数和分圆整数。下面简单叙述一下，由此可以体会代数数论的问题。

1．高斯整数论

高斯整数是整数最简单的推广，与通常的整数最为接近，与通常整数相比，它只是增加了一个复数单位 $\sqrt{-1}=i$。在这方面十分类似于把实数推广成复数。

高斯整数可以表示为

$$a+bi,$$

其中 a，b 是通常的整数。显然，两个高斯整数的和、差与乘积均为高斯整数，在这方面与通常整数一样，我们常常把具有这种性质的数的集合称为数环。

数论的第一步是可除性理论，具体来讲，一个高斯整数 $a+bi$ 具有哪些因子？更进一步说，原来的素数还是不是素数，是否可以进一步分解？高斯的一个惊人发现是：加入了 i 以后，许多原来的素数可以分解，也就是在高斯整数环中，它们不再是素数了。例如，2，5，29 这些素数都可以分解如下：

$$2=(1+i)(1-i),$$

$$5=(2+i)(2-i),$$

$$29=(5+2i)(5-2i),$$

而且，他还发现除 2 以外，可分解为复整数的素数都具有 $4n+1$ 的形式。但是，$4n+3$ 型的奇素数如 7，11，19 等在高斯

整数环中则不能再分解因子，它们都是高斯素数。

现在的问题是，除了 $4n+3$ 型的素数是高斯素数之外，还有哪些其它类型的高斯素数？由 2 的分解因子可以知道 $1+i$，$1-i$（还有 $-1+i$，$-1-i$）是高斯素数，其它的高斯素数呢？这里我们要用到范数，即复数 $a+bi$ 及其共轭复数 $a-bi$ 的乘积，这显然是通常正整数。由于两个高斯整数 $a+bi$ 与 $c+di$ 乘积的范数等于范数的乘积，因此，要高斯整数是高斯素数，则它的范数应是素数或 $4n+3$ 型素数的平方，而这就是高斯证明的。根据高斯这个定理，依范数的大小，高斯素数为

$1+i$	（范数为 2）；
$1+2i$，$2+i$	（范数为 5）；
3	（范数为 3^2）；
$3+2i$，$2+3i$	（范数为 13）；
$1+4i$，$4+i$	（范数为 17）；
$5+2i$，$2+5i$	（范数为 29）；
$6+i$，$1+6i$	（范数为 37）；
$5+4i$，$4+5i$	（范数为 41）；
7	（范数为 7^2）。

这样我们由范数就可以列举出所有的高斯素数。

要研究因子分解问题，除了素数之外，还要考虑单位数。对于正整数，单位数就是 1，而对所有整数，单位数还应加上 -1。对于高斯整数，单位数除了 $+1$，-1 之外，还要加上虚单位数 $+i$，$-i$，因此对于高斯整数来说，一共有 4 个单位数，它们的共同特点是它们的范数都等于 $+1$。正如通常整数的情形一样，我们不把单位数算在素数之内。在因子分解时，

两数如果只差一个单位数的因子，例如$1+i$，$-1-i$，$-1+i$，$1-i$，我们称为它们相伴，并不加以区别。值得注意的是，$a+bi$（如果$a\neq b$）与它的共轭复数$a-bi$并不相伴，虽然它们具有相等的范数，这是因为范数的定义中每个复数都要乘上其共轭复数。

高斯证明，对于高斯整数，因子唯一分解定理成立。这就是说，如果不考虑因子的次序和单位数的因子，素因子的数目和重数是唯一的。因此，对于高斯整数，通常整数的那些整除性定理也成立，其中特别是如果z，p，q，…，r都是高斯整数，

$$z^n=pq\cdots r,$$

且p，q，…，r互素，则p，q，…，r每一个都是一些高斯整数的n次方，即

$$p=a^n,\ q=b^n,\ \cdots,\ r=c^n,$$

显然，a，b，…，c等也互素。

2、二次代数整数

首先，我们定义什么是代数数，什么是代数整数。

定义1 二次代数数θ是满足整系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的根，θ的范数

$$N(\theta)=\theta\bar{\theta},$$

其中$\bar{\theta}$是θ的共轭数，即若

$$\theta=u+v\sqrt{d},$$

$$\bar{\theta}=u-v\sqrt{d},$$

$$N(\theta)=u^2-v^2d,$$

二次代数数都可以写成

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

这样它与有理数不同之处，就在于当

$$d = b^2 - 4ac$$

不是完全平方数时，将出现$\sqrt{d}$的项，这也就是二次代数数域，可以看成通常的有理数域添加$\sqrt{d}$的结果。因此，二次代数数域是整数与$\sqrt{d}$经过加、减、乘、除后得出的所有数的集合。

定义 2 二次代数整数是满足整系数二次方程

$$x^2 + bx + c = 0$$

的根。

因此，代数整数可以表示为

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}。$$

这就是前面的代数整数中有 2 为分母的来源。如果

$$b^2 - 4c = r^2 d,$$

其中 d 没有平方因子，则 Q（$\sqrt{d}$）中的代数整数都可以写成

$$\theta = \frac{-b \pm r\sqrt{d}}{2}。$$

因此，当 $d \equiv 1 \pmod 4$ 时，Q（$\sqrt{d}$）的整数可以由$\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right\}$生成，它称为整底，其判别式为 d。

$d \equiv 2, 3 \pmod 4$ 时，Q（$\sqrt{d}$）的整底为（1，$\sqrt{d}$），其判别式为 $4d$。

而且由不同的 d 就得到不同的二次域，且二次域完全由判别式（或 d）唯一决定。

定义 3 代数整数 α 可被代数整数 β 整除，如果存在代数整数 r，使得

$$\alpha = \beta r,$$

这时，r 记作$\frac{\alpha}{\beta}$。

定义 4 代数整数 ϵ 称为单位或可逆元，如果$\frac{1}{\epsilon}$也是代数整数。

不难验证，$N(\epsilon) = \pm 1$，反之，代数整数 θ 如满足

$$N(\theta) = \pm 1,$$

则 θ 是单位或可逆元。

通常整数的单位显然是 ± 1，但二次代数数域 $Q(\sqrt{d})$ 的单位随 d 不同有很大差异，我们假定 d 没有平方因子，有如下定理：

定理 1 $Q(\sqrt{d})$ 中整数的所有单位 U 如下：

(1) $d = -1$，即在高斯数域，$U = \{\pm 1, \pm i\}$，共 4 个。

(2) $d = -3$，即在三次分圆域，$U = \{\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^2\}$，$\omega = e^{2\pi i/3}$，共 6 个。

(3) 在其它 $d<0$ 的虚二次域，$U = \{\pm 1\}$，共 2 个。

(4) $d>0$，即在所有实二次域，$U = \{\pm \epsilon^n\}$，n 是任何整数，有无穷多个，ϵ 是佩尔方程

$$x^2 - dy^2 = 1$$

的最小解，即 $\epsilon = x + y\sqrt{d}$。例如 $Q(\sqrt{2})$ 的单位为

$$\pm (1+\sqrt{2})^h。$$

对于两个代数整数，如果它们只差一个单位因子，则它们在因子分解中可以不加区别，我们称它们相伴。对此，我们有下面的定理：

定理 2

(1) x 是单位当且仅当 $x|1$。

(2) 任何两个单位均相伴。

(3) 单位的相伴元仍是单位。

(4) 两代数整数 x，y 相伴，当且仅当 $x|y$ 且 $y|x$。

一般的代数整数与整数的主要差别在于因子唯一分解定理不成立，例如

$$6=2\times3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})。$$

因此，我们有必要从结构角度去研究。

5.2 结构理论

近代的代数数论已经不是数的理论而是相应的群、环、域的结构理论。

1. 单位（可逆元）群的结构理论

单位的结构理论的特殊情形先是由1844年爱森斯坦对三次代数整数、1845年克洛耐克对分圆整数以及埃尔米特对更一般情形给出，但是，1846年狄利克雷最终建立了一般代数整数的完整的单位结构理论。设 θ 为 n 次代数整数，即

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (*)$$

的根，设 θ_1，θ_2，$\cdots$，θ_n 为 $f(x)=0$ 的 n 个根，则形如

$$\varphi(\theta)=b_0+b_1\theta+\cdots+b_{n-1}\theta^{n-1},$$

b_i 为有理整数的复整数，称为单位，如果

$$\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)\cdots\varphi(\theta_n)=1,$$

假如方程（$*$）有 r_1 个实根，r_2 对共轭复根，

$$r=r_1+r_2-1,$$

则单位均可表成

$$\varepsilon_i e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_r^{m_r},\quad i=1,2,\cdots,r$$

的形式，其中 ϵ_i 是单位根，m_1，…，m_r 是非负整数，e_1，…，e_r 称为基本单位。但是对具体的代数整数环，明显造出单位决非易事。

尽管如此，单位的集合最早也是最容易赋予阿贝尔群的结构的。实际上，代数数域 k 的代数整数环 O_k 的单位群 U 是一个有限群。它是 k 中的单位根构成的有限群和自由阿贝尔群 $Z^{r_1+r_2-1}$ 的直和。

U 的秩为 r_1+r_2-1，相应 k 的次数为 r_1+2r_2，基本单位无非就是自由阿贝尔群 $Z^{r_1+r_2-1}$ 的生成元。

2．理想理论

在代数数论发展初期，域的结构并不太注意，环的层次也很少考虑，戴德金主要考虑理想的理论。

对于有理数域 Q 的任意扩张 k，都可以考虑其代数整数，代数整数全体构成环 O_k。它是整域，即有么元、无零因子的交换环。交换环 R 中子环称为理想子环，如果它是 R 中的 R 子模 I，也就是，如 x，$y\in I$，$r\in R$，则

$$x\pm y\in I,$$

$$xr=rx\in I,$$

对于代数整数环 O_k 中的理想 a，b，可以定义 a，b 的乘积

$$ab=\{\sum\alpha_i\beta_i\ (\text{有限和}),\ \alpha_i\in a,\ \beta_i\in b\}。$$

理想 p $(\neq O_k)$ 称为素理想，如对于 α，$\beta\in O_k$，如 $\alpha\beta\in p$，则 $\alpha\in p$ 或 $\beta\in p$。

对于任何 O_k 中理想 a，商环 O_k/a 是有限环。

定理 代数整数环 O_k 是诺特环，即 O_k 中任意理想的升链

$$a_1\subseteq a_2\subseteq\cdots\subseteq a_n\subseteq\cdots$$

到有限步终止，也就是存在 m，使

$$\mathfrak{a}_m=\mathfrak{a}_{m+1}=\mathfrak{a}_{m+2}=\cdots.$$

在 O_k 的所有理想中，可以引进一个等价关系～，$\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$ 当且仅当对 O_k 中非零元 α，β，

$$(\alpha)\ \mathfrak{a}=(\beta)\ \mathfrak{b},$$

其中 (α) 表示由 α 生成的主理想，即集合

$$\{\alpha r\mid r\in O_k\}。$$

在这等价关系之下，O_k 中所有理想划分成等价类，这个等价类的集合构成一个有限阿贝尔群，称为 O_k 或 k 的类群 M_k，类群的阶称为类数 h。

理想论基本定理 k 为 Q 上有限次代数数域，则 O_k 中每一个理想都可以表为素理想的乘积，而且这种表示除次序之外是唯一的。

后来，具有这种性质的交换环称为戴德金环，1925 年 E·诺特给戴德金环一个公理刻画。对于代数整数环，可以得到通常素数的主理想在 O_k 中是如何分解成素理想的。

进一步还可以引进 O_k 中的分数理想，这也是 O_k 模。O_k 模是分数理想，如果存在

$$\mu\in O_k,\ \mu\neq0,$$

使得

$$\mu\mathfrak{a}\subset O_k。$$

通常的理想是分数理想，其中 $\mu=1$，反之，如果 $\mathfrak{a}$ 是分数理想，则 $\mu\mathfrak{a}$ 是一个理想。对于分数理想，也可以同样定义和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$，乘积 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$，主分数理想 $(\alpha)=O_k\alpha$，$\alpha\in k$。所有主分数理想构成一个群 P_k，所有分数理想构成一个阿贝尔群 I_k。可以证明类群

$$H_k \cong \frac{I_k}{P_k}。$$

同样我们有下面的定理：

分数理想基本定理 任何 O_k 中的分数理想均可唯一表为素理想的乘积。

这样我们在代数数论中用环论的语言来表示代数整数的因子分解定理。对于代数数域 k，我们还可以研究它的有限代数扩张 K 的理想分解理论，得到大体类似的结果。

3．类域论

从某种意义上来讲，类域论是代数数论的一个顶峰、一项划时代的成就。它基本上是希尔伯特在 19 世纪末所设计的一项工程，而这个伟大建筑物则在 1900 年至 1930 年间陆续施工完毕。其后的工作多是修整及扩展并在其它领域上仿照这个框架实施新的、更宏伟的工程。

上面讲过，类域论之前的代数数论多是在环的层次上进行，而类域论则是从域论的角度来研究问题。研究域的结构的方式与研究群和环不太一样，群和环的研究重点在于内部的结构，而域论多研究外部结构，也就是它的扩张，对它们加以描述和分类。从这个意义上讲，它应该是伽罗华理论的一部分。

与许多人的想法不同，伽罗华理论的中心并不是群论而是域论，更正确地说，它研究域的扩张和扩张的伽罗华群的对应关系，或者是域的范畴到群的范畴的函子。从这个意义上讲，伽罗华理论的基本定理，即域的扩域的子域与伽罗华群的子群有着对应关系，更精确讲：

伽罗华理论基本定理 在满足

$$k \subset L \subset K$$

的中间域 L 与伽罗华群 G（K/k）的子群 H 一一对应，具体对应定义如下：

$$H \longmapsto K^H = \{x \in K \mid X^\sigma = X,\ 对所有\ \sigma \in H\},$$

$$L \longmapsto H_L = \{\sigma \in G(K/k) \mid 对所有\ X \in L, X^\sigma = X\}。$$

而正规子群 $H \Delta G$（K/k）精确对应伽罗华子扩张 L/k，而且对此有同构

$$G\ (L/k) \cong \frac{G\ (K/k)}{H_L}。$$

类域论首先讨论伽罗华群 G（K/Q）是阿贝尔群的伽罗华扩张 K/Q，它也常称为阿贝尔扩张，类域论最早的定理是：

克洛耐克—韦伯定理 Q 上任何阿贝尔扩张 K 都包含在某个循环扩张之中。

这里所谓循环扩张是指在 Q 中添加某个本原单位根 S_m，

$$S_m = \sqrt[m]{1}。$$

希尔伯特以分圆域为模式，提出类域的概念，他把类域看成极大非分歧的阿贝尔扩张，并提出一些猜想：

（1）任意代数数域 k 上的类域 K 存在且唯一。

（2）阿贝尔扩张 K/k 的伽罗华群同构于 k 的理想类群。

（3）主理想定理：k 中的理想均可扩张成 K 的主理想。这些猜想在 1907 年和 1934 年由奥地利数学家伏特万格勒（Furtwängler, Philipp, 1869—1940）所证明。这样希尔伯特的原始类域论就基本上完成了。1920 年日本数学家高木贞治（Takagi, Teiji, 1875—1940）大大扩展了类域的概念，他证明：任何代数数域 k 上任何阿贝尔扩张 K 都可表为 k 上的类域。这样一来，类域论成为研究 k 上阿贝尔扩张的问题。这样得出类域论一系列基本定理，其中包括：

(1) 主定理：任何相对阿贝尔扩张 K/k 都是 k 的某个理想类群 H 的类域。

(2) 存在性定理：对于任意理想类群 H，存在 H 的类域。

(3) 唯一性定理：H 类域是唯一的。

1927年，阿廷证明一般互反律，明确得出相对阿贝尔扩张与伽罗华群的对应关系，并且得出当时所知的所有互反律，为整体域或全局域的阿贝尔扩张画上一个圆满的句号。

1930年以后，类域论经过多方面的改进与推广：

(1) 1930年施密特把代数数域的类域论推广到有限域上和单变元代数函数域上，这两种域有很大的相似性，后来合在一起，称为整数域。

(2) 1930年左右，阿廷和哈塞（Hasse, Helmut, 1898—1979）开始研究局部域（即 p 进域及其代数扩张以及有限域上形式幂级数域）的阿贝尔扩张问题，由此构成局部类域论。1950年左右采用上同调的语言表述，1974年荷兰数学家哈泽温克尔（Hazewinkel, Michiel）采用形式群的构造方法，给出简明的表述。

(3) 1940年薛华荔引入伊德尔（*Idele*）的概念，把类域论算术化，即不用分析工具。同时他也明确显示局部域与整体域的关系。

(4) 类域论后来推广到非阿贝尔扩张以及无限伽罗华扩张，在这方面魏伊起了重要的作用。

魏伊在代数数论方面的工作集中表现在“论类域论”一文中。文中对任意局部域或整体域有限伽罗华扩张 K/k 定义一个拓扑群 $G_{K,k}$，它反映了扩张 K/k 的深刻的性质，他证明 $G_{K,k}$的存在性及唯一性，并由此得出类域论的基本定理。因

此，$G_{K,k}$被称为魏伊群，它有一系列优点，它不仅包括代数数域，还包括有限域上单变量代数函数域，这两种整体域在魏伊的《基础数论》中称为 A 域。此外还包括局部域，从而对局部域及整体域做出统一处理。另外还由阿贝尔扩张推广到一般伽罗华扩张。魏伊对 $G_{K,k}$还引进相应的 L 函数，它是阿廷 L 函数及 E·海克的有量特征标的 L 函数的推广。不仅如此，魏伊的工作直接为类域论的上同调表达铺平道路。中山正(Nakayama, Tadasi, 1912—1964)在阅读魏伊上文手稿后，同 G·霍赫希尔德(Hochschild, Gerhard Paul, 1915—)一起于 1952 年发表"类域论中的上同调"，为类域论的推广奠定基础。

1936 年到 1940 年，薛华荔为了把类域论算术化，引入了伊德尔的概念，用它可完全地表述类域论。1938 年，魏伊独立引入阿德尔的概念，但名称 20 年后才用。而对任何域 k，可定义其阿德尔环 A_k。阿德尔环的所有乘法可逆元构成该域的伊德尔群 C_k。伊德尔群是局部紧阿贝尔群，因此其上有哈尔测度及调和分析，由此可以得出类域论的表述。1960 年，魏伊发表"阿德尔与代数群"，把以前的研究系统化。特别对整体域上的二次型理论，推广了希格尔等人的理论。魏伊引入所谓玉河（恒夫）（Tamagawa Tsuneo, 1925—）测度及玉河数。玉河测度即整体域上连通线性代数群 K 上阿德尔群 G_A 的测度，$G_A^{(1)}$ 是 G_A 的一个子群，那么玉河数即齐性空间 $G_A^{(1)}/G_k$ 关于玉河测度的体积。所有二次型的约化定理都可归结为玉河数有限这个定理。魏伊证明这个结果，并对各种特殊群计算玉河数。他猜想，所有单连通代数群，玉河数＝1，魏伊对多数单群证明这个猜想。对代数数域上代数群，考特威茨(Kottwitz）于 1988 年证明魏伊猜想。

5.3 解析理论

在数学中，我们往往对同一对象采用不同的方法去研究，对代数数论也是一样。大体来讲，我们有四类相互关联的方法：

（1）初等方法

（2）抽象代数方法

（3）解析方法

（4）几何方法

对于初等数论，我们有强有力的解析方法去解决问题，但对于代数数论，抽象代数方法起着主导作用，可是其中许多问题仍然得求助于解析方法。

1. ζ 函数与 L 函数

解析方法的核心是 ζ 函数和 L 函数。在代数数论中，定义许多 ζ 函数和 L 函数，其中特别重要的是：

（1）与数域联系的函数，首先是戴德金对代数数域引进的戴德金 ζ 函数，它与代数数域的类数有关。

（2）与有限域上代数函数域联系的函数，或者有限域上定义的代数曲线乃至代数簇的 ζ 函数，与它相关的猜想，即所谓魏伊猜想。1973 年德林完全证明魏伊猜想是 20 世纪数学最重大成就之一。

阿廷注意到有限域上代数函数域及代数数论之间的类似，自然对于戴德金 ζ 函数加以推广。1921 年，阿廷首先把 ζ 函数推广到代数簇上。他对有限域 F_p（p 为素数）上的仿射曲线 C，

$$C: y^2 = f(x),$$

定义 C 的 ζ 函数

$$\zeta_c(s) = \sum_I \frac{1}{(NI)^s}, Re(s) \gg 0,$$

NI 是 A 中理想 I 的范数，即商环 A/I 的基数，其中 $f(x) \in F_p[x]$，A 是 $F_p[x]$在多项式

$$y^2 - f(x)$$

的分裂域中的整闭包。

1931 年，史密特(Schmidt, Friedrich Kard, 1901—1977)首先对于有限域 $F(q)$上任意非奇异射影代数曲线 C 引入 ζ 函数，并且证明如曲线亏格为 g，则 ζ 函数

$$Z(u, C) = \frac{P_1(u)}{(1-u)(1-qu)},$$

其中，$P_1(u)$为 $2g$ 次整系数多项式，$P_1(o) = 1$，且 $Z(u, C)$满足函数方程

$$Z\left(\frac{1}{qu}\right) = \pm (qu^2)^{1-g} Z(u)。$$

但是曲线的黎曼猜想，即 $P_1(u)$的零点的绝对值为 $q^{-\frac{1}{2}}$，首先是阿廷提出来的，他证明一些特殊情形；对于 $g = 1$，是德国数学家哈塞在 1933 年证明的。对于一般代数曲线，黎曼猜想由魏伊在 1948 年证明。

1949 年，魏伊进一步把 ζ 函数推广到有限域上一般代数簇 V 上，

$$Z(u, V) = exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{u^n}{n}\right),$$

N_n 表示在 k 的 n 次扩域中的点数，其中 exp 表示指数，$Z(u, V)$表示具有有理系数的形式幂级数。

1949 年，魏伊对 $Z(u, V)$做出四个猜想：

(1)有理性猜想：$Z(u, V)$是 u 的具有有理系数的有理函数。

(2)函数方程：存在整数，称为 V 的欧拉—庞加莱示性数，使得 $Z(u, V)$满足如下函数方程

$$Z\left(\frac{1}{q^{d}u}\right)=\pm\left(q^{\frac{d}{2}}u\right)^{E}Z(u)。$$

(3)黎曼猜想：存在多项式 $P_i(u)$，$0\leqslant i\leqslant 2d$，使得

$$Z(u)=\frac{P_1(u)P_3(u)\cdots P_{2d-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\cdots P_{2d}(u)},$$

其中

$$P_0(u)=1-u,$$

$$P_{2d}(u)=1-q^{d}u,$$

且每个 $P_i(u)$均为整系数多项式，其次数记作 b_i，可以写成

$$P_i(u)=\prod_{j=1}^{b_i}(1-\alpha_{ij}u),$$

其中 α_{ij}均为代数整数，满足

$$|\alpha_{ij}|=q^{\frac{i}{2}},$$

而且如 P_i 存在，这些条件唯一决定多项式 P_i。

(4)贝蒂数：P_i 的次数 b_i 称为代数簇 V 的贝蒂数，它满足 V 的欧拉—庞加莱示性数

$$E=\sum_{i=0}^{2d}(-1)^{i}b_i。$$

如果 V 由定义在数域的整数环上的代数簇 V 通过模一个素理想得来，则 b_i 为 i 次上同调群 $H^{i}(V(c), Z)$的秩，其中 $V(c)$为用定义 V 的同一方程所定义的复射影代数簇，具有通常的拓扑。

魏伊提出，对于抽象代数簇，如果引入适当定义的上同调，

类似于对复数域上代数簇引入通常上同调,则可以证明上述猜想,他自己证明了特殊情形的魏伊猜想。1960 年德沃克(Dwork, Bernard, 1923—)用 p 进分析成功地证明了有理性猜想及函数方程。

为了要解决魏伊猜想,格罗登迪克在 1963 年用通常代数簇上 *étale* 上同调引入抽象代数簇上 l 进上同调理论,他还给出 $Z(u, C)$的有理性及函数方程的另外一个证明。

最终黎曼猜想的最困难部分由德林在 1973 年用 l 进上同调成功地证明。

设 V 为有限域上 d 维不可约非异射影代数簇,$\overline{V}$ 为 V 在 k 的代数闭包 $\overline{k}$ 上的点集,在其上赋予 *étale* 拓扑。对于任意整数 $r \geqslant 1$,存在 *étale* 上同调

$$H^i_{et}(\overline{V}, Z(l_r))。$$

这样就可以定义 V 上的 l 进上同调

$$H^i(V, Q_l) = \varprojlim_r H^i_{et}(\overline{V}, Z(l_r)) \otimes_{Z_l} Q_l,$$

其中 $\varprojlim_r$ 为 $Z(l_r)$的逆向极限。

l 进上同调有如下性质:

(1)$H^i(V, Q_l)$是 Q_l 上有限维向量空间,除 $0 \leqslant i \leqslant 2d$ 外,

$$H^i(V, Q_l)=0。$$

(2)对所有 i, j,均存在上积结构

$$H^i(V, Q_l) \times H^j(V, Q_l) \longrightarrow H^{i+j}(V, Q_l)。$$

(3)庞加莱对偶性

最高维上同调 $H^{2d}(V, Q_l)$为一维,上积定义非退化配对,对 $0 \leqslant i \leqslant 2d$,

$$H^i(V, Q_l) \times H^{2d-i}(V, Q_l) \longrightarrow H^{2d}(V, Q_l) \simeq Q_l。$$

(4)孔尼特公式

对于两非奇异 X, Y,存在分次代数的自然同构

$$H^{*}(X, Q_{l})\otimes H^{*}(Y, Q_{l})\xrightarrow{\sim} H^{*}(X\times Y, Q_{l})。$$

(5)莱夫谢兹不动点公式

设 $f: V\longrightarrow V$ 为具有孤立不动点的态射,且每个不动点具有重数 1,设 $L(f)$ 为 f 的不动点数目,则

$$L(f)=\sum_{i=0}^{2d}(-1)^{i}T_{r}(f^{(i)}; H^{i}(V, Q_{l})),$$

$f^{(i)}$为 H^{i} 上的诱导的拉回映射。

2. 自守形式及模形式

高斯已经知道模函数的观念,但他从来没有发表过这方面的著作。只有在 1860 年以后,人们才重新发现这个概念并且加以研究。到 1880 年之后,模函数的理论就融合到庞加莱所创造的单复变量自守函数的一般理论中去。这时,可以充分看出函数、群与不变性理论之间的密切关系。在这个意义下,模函数和自守函数的远亲可以看成是三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 以及椭圆函数,它们分别是单周期函数和双周期函数,只不过在研究三角函数的过程中,没有有意识地考虑群(平移群 Z)以及不变区域(区间$[0,2\pi]$),而在庞加莱自守函数论中,这些都有系统的论述。把这个理论推广到多变量情形,首先是希尔伯特模形式,而直到关于整系数二次型的工作发表之后才真正有所发展。因为只有这个工作明显带有李群理论的特色,从此李群和它的离散子群在数学中开始占有重要地位。同时,海克在模形式的算术理论中发现一条新的途径,而在此之前,大家还以为这个理论已经十分完善。从那时起,自守形式及模形式的理论成为各式各样的理论,像复解析几何、代数几何、同调代数、非交换调和分析以及

数论彼此相互作用的特别突出的交会点。

庞加莱的古典自守函数是：X 是复上半平面

$$H: Imz>0,$$

G 是由 H 的如下变换 r 所构成的群(同构于 $PSL(2,R)$)，

$$r: z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

而 a,b,c,d 是实数，满足 $ad-bc=1$。由于对任何 $z\in X$，

$$f(rz)=(cz+d)^k f(z),$$

我们称

$$\alpha(r,z)=(cz+d)^k$$

为自守因子，这里的 k 是整数，并称相应的自守形式是权为 k。而与 a,b,c,d 是整数的 r 所构成的群 Γ(同构于 $PSL(2,Z)$)相对应的自守形式就称为模形式。

庞加莱及其继承者还研究 $SL(2,C)$ 的离散子群(称为克莱因群)及相应的自守函数，而一般的自守函数是它的自然推广。设 X 是 C^n 中的有界开集或它在双全纯映射下的象集，设 G 是 X 的(双全纯映射)自同构群，G 上赋予“紧开”拓扑。设 Γ 是 G 的离散子群，我们称 X 上的全纯函数 f 为(关于 Γ 的)自守形式，如果存在在 $\Gamma\times X$ 上定义的函数 $\alpha(r,z)$，关于 z 是全纯的，而且处处 $\neq 0$，使得对于所有的 $r\in\Gamma$，有

$$f(rz)=\alpha(r,z)f(z),$$

对于任意 $z\in X$，函数 α 称为自守因子，它满足下面关系

$$\alpha(rr',z)=\alpha(r,r'z)\alpha(r',z)。$$

X 上的自守函数是 Γ 作用下不变的亚纯函数，例如两个不成比例但具有相同自守因子的自守形式的商就是非常数的自守函数。

权为 k 的模形式的集合构成 C 上的向量空间。直和 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$ 构成一个分次代数。它同构于以 G_4 和 G_6 为生成元的多项式环，模形式空间上作用着海克算子。

给定一串复数序列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

满足某种增长条件

$$a_n = O(n^c),$$

构造函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

它在上半平面全纯。问题是在什么情况下，f 是一个模形式，具有权 k，级 N 和特征标 χ？

这个问题首先由德国数学家海克研究，他对于模群 $\Gamma = SL_2(Z)$ 情形研究，他得到一个判据，依赖于其相伴的 L 函数

$$L(s, f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s, f)$$

的解析行为，他证明：

如 f 是关于模群 Γ 的模形式，则

$$L(s, f) = i^k L(k-s, f)。$$

反之，如

$$L(s, f) = i^k L(k-s, f),$$

则 f 关于模群 Γ 是权 k 的模形式。

魏伊在 20 世纪 60 年代的工作主要是发展海克的理论。1936 年海克在具有函数方程的狄利克雷级数与模函数之间建立了一一对应。1967 年起，魏伊首先大大发展了海克理论，使任何模群的同余子群的模形式都对应狄利克雷级数。反过来对于任何满足函数方程的狄利克雷级数均可做出自守函数，该

自守函数可以通过梅林（Mellin, Robert Hjalmar, 1854—1933）变换由狄利克雷级数得出。

5.4 几何理论

代数数论的几何理论通常称为算术代数几何，也简称算术几何。这是当前数学发展的最前沿。近十几年来，在这个领域取得许多最重要的突破。首先是1994年维尔斯通过椭圆曲线的算术解决了有350年历史的费尔马大定理，其次是1983年德国数学家法尔廷斯（Faltings, Gerd, 1954—）证明了莫德尔猜想，即定义在有理数域上的 $g>1$ 的代数曲线只有有限多有理点。实际上，法尔廷斯证明的更多，定义在任何代数数域上的 $g>1$ 的代数曲线的有理点（即'坐标'为该域中代数数）也只有有限多。由这两大成就可以看出算术代数几何的主要问题是讨论丢番图方程的有理解（包括整数解）的，因此，它也称为丢番图几何。

丢番图方程的求解问题可追溯到3000多年前，是数学史中最古老的领域。这个领域问题零散，换一个方程就有不同的结果，需要用不同的方法。而在所有方法——初等方法、代数方法、解析方法、丢番图逼近方法、丢番图几何方法之中，只有代数几何方法给出系统的结果。这样，我们考虑的方程主要是多项式方程和多项式方程组，它们的解就是有理数域 Q 或代数数域 k 上的代数簇。但是，现在的代数簇不是定义在 C 上，它是离散的，因此比起连续的代数曲线、曲面来，研究要难得多，在这种情况下，我们又要求助于 ζ 函数和 L 函数方法，也就是定义有理数域 Q 上代数簇的 L 函数。

值得注意的是，Q 上代数簇的一些结果很容易推广到一

般代数数域乃至一般的整体域有时是局部域上。实际上，从以前的研究不难看出，有理数域和代数数域的算术或数论有极强的相似性。虽然粗略地讲，代数数域的元素数目要比有理数域多得多，从集合论的角度讲，有理数域是任何代数数域的真子域。例如 1977 年马祖尔证明有理数域上定义的椭圆曲线的有理点群的挠子群只有有限多种可能。到 1996 年对于代数数域也证明了相应的结果。我们总是先考虑 Q，不仅是因为它简单而且也因为即使在 Q 上，我们在最简单的椭圆曲线上，仍然还有极多的难题尚未解决。

对于有理数域 Q 上的代数簇 X，可以通过 l 进上同调，对每个素数 p 定义 $L_p(X,s)$，然后定义第 i 个 L 函数为

$$L(X,s)=\prod_p L_p(X,s),\ Re(s)>\frac{i}{2}+1,$$

以及

$$\Lambda(X,s)=A^{\frac{s}{2}}L_\infty(X,s)L(X,s)。$$

对于这些 L 函数，我们有下面的猜想：

L 函数的标准猜想

(1) $L_p(X,s)^{-1}\in Z[P^{-s}]$不依赖于素数 l。

(2) 对于 $Re(s)>\frac{i}{2}+1$，欧拉乘积

$$L(X,s)=\prod_p L_p(X,s)$$

绝对收敛，并且在这个区域内不等于 0。

(3) $L(X,s)$可以亚纯开拓到整个复数平面，最多当 i 为奇数时，$L(X,s)$开拓成全平面的一个整函数。

(4) $L(X,\frac{i}{2}+1)\neq 0$。

(5) 函数方程

$$\Lambda(X, s) = \pm \Lambda(X, i+1-s)$$

成立。

下面讨论椭圆曲线的丢番图几何。

椭圆曲线的几何

我们这里要讲的椭圆曲线是最典型的三次曲线。需要反复强调的是，椭圆曲线不是椭圆，椭圆是二次曲线，椭圆曲线是三次曲线，椭圆曲线的方程也是牛顿提出的 4 种标准形式中的一种。

最一般的三次平面曲线方程可写为

$$ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0,$$

经过坐标变换之后，我们可以把 x^3 或 y^3 的系数变成 0，通常我们保留 x^3 项而令 y^3 项的系数为 0。

进一步简化，我们得到 4 种标准形式之一：

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6。$$

这个方程还可以进一步简化成椭圆曲线的标准形式

$$y^2 = x^3 + a_4 x + a_6。\qquad (*)$$

方程右边的多项式有一个判别式

$$\Delta = -16(4a_4^3 + 27a_6^2),$$

判别式是用来研究代数方程根的性质的，例如二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的判别式为

$$b^2 - 4ac。$$

根据判别式的符号，可知道二次方程有一对虚根、一对实根还是重根，仿照这个，我们可以根据 Δ 对椭圆曲线进行分类：

(1) $\Delta < 0$，式(*)右端 $x^3 + a_4 x + a_6 = 0$ 只有唯一一个实

根，椭圆曲线是一个连通的曲线。

(2)$\Delta<0$，式(*)右端 $x^3+a_4x+a_6=0$ 有三个不同的实根，这样椭圆曲线由两个分离的曲线构成，一段曲线两端无限延伸到无穷，另一部分是卵形的封闭曲线，这实际上是我们主要研究的椭圆曲线。

(3)$\Delta=0$，这时

$$x^3+a_4x+a_6=(x-a)^2(x-b),$$

且 $2a+b=0$。

这种情形一般不属于我们要研究的椭圆曲线，或者说它是有奇点的退化的椭圆曲线，它有三种情形：

①$a>b$，一条曲线，有一个二重点，具有两条不同的实切线。

②$a<b$，一条曲线通向无穷，另外还有一个孤立点$(a,0)$，这点也是二重点，它具有不同的虚切线。

③$a=b=0$，一条曲线，$x=0$ 处有一个尖点。

在椭圆曲线上，通过点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$的直线，如果与椭圆曲线 $y^2=x^3+a_4x+a_6$ 相交于第三点 P_3，则其坐标为

$$x_3=-x_1-x_2+\frac{1}{4}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2,$$

$$y_3=y_1+\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)(x_3-x_1)。$$

显然$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$是这条直线的斜率。

如果 P_1，P_2 重合，这时过 P_1 的切线与椭圆曲线交于 P_3，则 P_3 的坐标为

$$x_3 = -2x_1 + \left(\frac{3x_1^2 + a_4}{2y_1}\right)^2。$$

椭圆曲线的算术

椭圆曲线的算术的基本定理是：椭圆曲线上的有理点的全体构成一个阿贝尔群。群的元素现在不是数而是点，因此我们必须规定，两个点的和（我们用⊕来表示）应该是哪一点，每个点的逆元素是什么，然后再验证它们是否满足阿贝尔群的几条公理。

(1)首先我们规定每一点 P 的反点 $\bar{P}$，由于任何椭圆曲线都关于 x 轴对称，即如果 $P(x, y)$是椭圆曲线上的一点，则$(x, -y)$也是椭圆曲线上一点，我们称它为 $P(x, y)$的反点，记作 $\bar{P}(x, -y)$。

(2)现在我们定义两点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$的加法运算的和。

如果连结 P_1 和 P_2 的直线与椭圆曲线的一点 P_3，则定义其和为 P_3 的反点

$$P_1 \oplus P_2 = \overline{P_3}。$$

(3)每一点的逆元素为其反点。

(4)零元素为无穷远点。

在这样定义之下，不难验证运算⊕满足交换律、结合律等阿贝尔群公理。

从数论的角度看，最有兴趣的是有理数域 Q 上的椭圆曲线，也就是椭圆曲线上坐标为有理数的点集 $E(Q)$，因为椭圆曲线方程作为不定方程，其有理解的集合无非就是 $E(Q)$。一般来讲，不定方程的解的集合没有什么特殊规则，但是椭圆曲线的有理点集有着极好的规律性，这种规律性首先是法国大数学家

庞加莱认识到的，他证明这些点构成一个阿贝尔群，并猜想这是由有限多个元素生成的。这个猜想由莫德尔在1922年证明。这样一来，对于椭圆曲线的知识由一个挠子群和一个数——秩 r 决定。任何椭圆曲线 $E(Q)$ 的挠子群只有15种，因此，计算秩是椭圆曲线算术理论的主要问题，而每条椭圆曲线都伴随一个 L 函数，秩 r 与 L 函数的关系产生椭圆曲线三大猜想：

(1)黎曼猜想或哈塞—魏伊猜想；

(2)谷山(丰，Taniyama, Yutaka, 1927—1958)—志村(五郎，Shimura, Goro, 1930—)—魏伊猜想；

(3)伯奇(Birch, Bryan John 1931—)—斯温耐顿-代尔(Swinnerton-Dyer, Henry Peter Francis, 1927—)猜想。

(1)黎曼猜想或哈塞—魏伊猜想

若 E 是 Q 上椭圆曲线，其上可定义整体 L 函数 $L(s,E)$。

$$L(s,E)=\prod_p P(E_p/F_p,p^{-s})^{-1},\ Res>\frac{3}{2},$$

其中 $P(E_p/F_p,p^{-s})=(1-\alpha_1 p^{-s})(1-\overline{\alpha p}^{-s}),\ |\alpha|=\sqrt{p}$。
可证

$$L(s,E)=\prod_p \frac{1}{(1-a_p p^{-s}+\epsilon_p(P)p^{1-2s})},\ Res>\frac{3}{2},$$

其中

$$\epsilon_p(P)=\begin{cases}1, & E\text{ 在 }P\text{ 有好的约化,}\\ 0, & E\text{ 在 }P\text{ 有坏的约化,}\end{cases}$$

$$a_p=1+p-\#(E_p(F_p)),$$

$\#(E_p)$ 表示 E_p 的点数。

椭圆曲线的哈塞—魏伊猜想：

①$L(s,E)$ 可全纯开拓到整个 s 平面；

②$L(s,E)$ 在每个有限宽的垂直带上有界；

③满足函数方程

$$L(s,E)=\epsilon(s,E)L(2-s,E)。$$

有趣的是，在一般 ζ 函数来证明的黎曼猜想，对椭圆函数已经证明。

(2)谷山—志村—魏伊猜想

椭圆曲线上的数论是当前一大热门，其中最重要的是谷山—志村—魏伊猜想：所有椭圆曲线均为模曲线，即可用模函数参数化的曲线，这种曲线也称魏伊曲线。这猜想的威力可由它蕴涵费尔马大定理看出。椭圆曲线另一重要猜想是沙法列维奇群 Ш 有限。魏伊在这方面有两个贡献：一是把玉河数与沙法列维奇群 Ш 联系在一起，二是把沙法列维奇群推广到阿贝尔簇上。魏伊证明阿贝尔簇 A 上主齐性空间的集合有群的结构，该群称为魏伊—沙特莱群，记作 $WC(A,k)$，这是魏伊在 1955 年引入的。他还对各种域定出 $WC(A,k)$，并且通过 $WC(A,k)$定义阿贝尔簇的沙法列维奇群，当阿贝尔簇为一维时，即是椭圆曲线。1988 年已经证明对有理数域的魏伊曲线，沙法列维奇猜想成立。另外，魏伊还建立了魏伊高度理论，对于丢番图几何至关重要。

(3)伯奇—斯温耐顿－代尔猜想

从某种意义上来讲，它相当于戴德金的类数公式。

①粗猜想：椭圆曲线 E 的 L 函数 $L(s,E)$在 $s=1$ 时具有零点，它的零点阶数 r 等于 $E(Q)$的莫德尔—魏伊群 $E(Q)$的秩。

②细猜想：

$$\lim_{s\to 1}\frac{L(s,E)}{(s-1)^r}=\frac{\Omega\cdot\#(\text{Ш}(E))\cdot R(E)}{(\#E(Q)_{tor})^2}\prod_p C_p,$$

其中

$$\Omega = \int_{E(R)} |w|, w = \frac{dx}{2g + a_1 + a_2},$$

$\#(Ш(E))$是沙法列维奇群的阶，$R(E)$是椭圆规准，是正实数。C_p 是子群指数，对几乎所有 p, $C_p = 1$。$\#(E(Q)_{tor})$表示$E(Q)$上挠元的数目。

这个猜想极为困难，因为沙法列维奇群 $Ш(E)$虽然出现在公式当中，可是还不知道它是否是有限群。

沙法列维奇群是如下定义的：

$$Ш(E) = Ker\{WC(E/Q) \longrightarrow \prod_{p \leq \infty} WC(E/Q_p)\},$$

Q_p 表示 p 进数，$Q_\infty = R$，映射来自明显的 Q 到 Q_p 的嵌入，WC 是魏伊—沙特莱群，因此我们有附属的有限性猜想：

有限性猜想 $Ш(E)$是有限群。

卡塞尔斯(Cassels, John William Scott, 1922—)在 1962 年证明，如果 $Ш(E)$有限，则其阶是一个完全平方。

第一个突破来自汝宾(Rubin, Karl, 1956—)，他在 1986 年证明：

定理 如 E 是具有虚二次域的复数乘法的椭圆曲线，且

$$L(1, E) \neq 0,$$

则 $Ш(E)$有限，而且 $E(Q)$也有限。

这种情形下 $E(Q)$有限早在 1977 年由科兹(Coates, John, 1945—)和维尔斯所证明，后者就是证明费尔马大定理的那位英国数学家。

进一步 1988 年苏联数学家科雷瓦金(Kolyvagin, V.)证明：

定理 如 E 是模椭圆曲线，且 $L(1, E) \neq 0$，则 $E(Q)$和 $Ш(E)$都是有限群。

这样一来，如果谷山—志村—魏伊猜想成立，则有限性猜想

成立。当然，这只是证明伯奇—斯温耐顿-代尔猜想的第一步。

但对于粗猜想，当椭圆曲线的秩为 0，1，∞时，已经得到证明。

椭圆曲线的猜想的推广通常有两个方向：

(1)推广到亏格 $g>1$ 的代数曲线，但往往这两类曲线不一样，猜想往往难以成功。

(2)推广到阿贝尔簇，阿贝尔簇可以看成椭圆曲线的高维推广，它们都具有阿贝尔群结构，许多猜想可以自然推广，特别是伯奇—斯温耐顿-代尔猜想。早在 1980 年布洛赫(Bloch)证明，对于阿贝尔簇，伯奇—斯温耐顿-代尔猜想等价于玉河数猜想，即玉河数

$$\tau(G)=\frac{\#(Pic(A)_{tor})}{\#(Ш(A))}。$$

更进一步，我们还有更一般的代数簇上的算术代数几何。

结束语：世纪之交的结构数学

本书不打算概括整个结构数学，也不可能概括，而且结构数学虽然是20世纪的主流，究竟也难以覆盖整个数学。因此，我们有必要把眼光看到未来，同时对结构数学的边缘地带也略提一下。

20世纪70年代以来，几个大的结构数学领域有着更进一步的发展，它们不仅从水平上上了一个新台阶，而且它们之间也有着千丝万缕的联系。另外，我们也想指出，它们同数学两项重大的国际奖，沃尔夫奖和菲尔兹奖的一些获得者的工作，特别是他们的奠基性工作有关。

1. 李群及其表示论

群表示论不仅在理论方面有着重大意义，而且对于数学内外的分支有着不可或缺的应用。一般来讲，群当然不限于李群，但是李群有着特殊重要的意义。

群表示论的发展可以说经历如下几个阶段：

(1) 奠基阶段，主要是19世纪末、20世纪初对于有限群进行的，主要的研究者是弗洛宾尼乌斯、伯恩塞德和I·舒尔，他们建立的理论框架对群表示论至关重要，其中特别重要的有：

①酉性及完全可约性

②舒尔引理

③舒尔正交性

④付立叶反演

⑤完备性

⑥诱导表示

其中③④⑤直接与付立叶分析或调和分析有关。

(2) 紧群的有限维表示 (20 世纪 20 年代)

要把有限群的结果推广到紧群，唯一需要的工具是不变积分。胡尔维茨早在 1897 年已经有这个概念，但到 1924 年 I·舒尔看出，一旦有了不变积分，①②③立即可推广到紧群，并由此得出旋转群与酉群的不可约表示。在他的激励下，外尔在 1924 年到 1926 年发展了紧李群理论，在 1927 年通过彼得(Peter) 一外尔定理推出了④⑤，其后 E·嘉当把李群的表示同他在 1913 年的复半单李代数的不可约表示分类的关系做了阐述，其后许多数学家沿着这条道路得出许多奇妙的结果。

(3) 局部紧群的无穷维表示

对于非紧又非交换的李群，表示论有很大的困难。首先是维格纳在 1938 年给出非齐次洛仑兹群的表示，其后苏联、法国和美国的数学家们大大推动了无穷维表示理论，特别是苏联的盖尔范德学派对于半单李群的表示。哈瑞什－钱德拉 (Harish-Chandra, 1923—1983) 系统地研究半单李群的表示。法国狄米埃 (Dixmier, Jacques, 1924—) 关于幂零李群的工作，同时苏联的基里洛夫 (Kirillov, Aleksandr, 1936—) 发展了轨道方法；普堪斯基 (Pukanszky, Lajos, 1927—1996) 等进一步研究可解李群的表示。

至今为止，对于一些典型群，已经取得巨大进展。但是无

论是一般的群，还是一些特殊的群，如 SL（2，R），分类问题还远未解决。更进一步对于 p 进群及阿德尔群的表示问题，更是方兴未艾。

2．朗兰兹纲领

朗兰兹是1996年度沃尔夫奖获得者。1970年他正式提出朗兰兹纲领，这是代数数论特别是类域论的大规模推广，特别是把数域的阿贝尔扩张推广到非阿贝尔扩张，而且把阿廷互反律及 L 函数加以推广。朗兰兹把非交换调和分析、自守函数论和数论统一在一起，得出一整套猜想，其中最典型的是朗兰兹互反律的猜想：任何 n 维伽罗华群表示的阿廷 L 函数都等于另一类 L 函数，这种 L 函数与数域扩张的阿德尔环 A 的 GL_n（A）的不可约允许表示相对应。对于一维情形，这正好是阿廷互反律，即阿廷 L 函数等于海克 L 函数。朗兰兹等人证明 GL（2）的情形，这个结果也是证明费尔马大定理的基石。

对于高维和函数域情形也有一些结果，但是这个大纲领的方方面面仍有许多神秘性质有待揭露。这个伟大的纲领蕴涵许多重要的猜想，例如阿廷猜想，它的进展势必推动数学统一性的认识。

3．格罗登迪克的抽象概形理论

代数几何学经过范·德·瓦尔登、魏伊、查瑞斯基到塞尔，已经使代数簇完全抽象化，并且引进一些代数和拓扑的方法解决一系列问题。然而代数簇最彻底的推广还是格罗登迪克在20世纪50年代末做出的。大约十多年间，已经为全新的代数几何学造出抽象的对象——概形以及一大套处理方法，这使得一系列的问题得到解决。

他在代数几何学方面的贡献可分为10个部分，主要是：

(1) 连续与离散的对偶性（导来范畴，六个演算）

(2) 黎曼—洛赫—格罗登迪克理论（K 理论与交截理论的关系）

(3) 概形

(4) 拓扑斯

(5) 平展上同调与 l 进上同调

(6) 动形（*motiv*）与动形的伽罗华群（格罗登迪克的⊗范畴）

(7) 晶体与晶状上同调、德·拉姆系数、霍奇系数的理论

(8) 新的同伦代数，拓扑斯的上同调

(9) 稳和拓扑

(10) 非阿贝尔的代数几何学，伽罗华—泰什缪勒理论。

这个博大精深的理论还远远没有弄清楚，但是其中一点已经带来极深刻的成果，例如证明魏伊猜想和 K 论。

4. 非交换几何

这是1982年非尔兹奖获得者康耐的创造。他的最早工作是把冯·诺伊曼开创的算子代数理论所遗留的问题进一步解决。其后把他的理论工作范围推进到叶状结构、指标定理、K 理论、微分动力系统等领域，可以说核心是 K 理论，它的整个发展都是与拓扑密不可分的，更具体地讲就是上同调的一套语言都可以照搬到这里。因此，只要理解拓扑的框架，就不难理解其自然发展，但是从交换到非交换有着极为困难的过渡，因此需要新的工具和技术。近年来这方面有重要进步，典型的有1997年沃宜沃也夫斯基（Voevodsky，Vladimir）证明米尔诺猜想，它是著名的布洛赫—加藤猜想的特殊情形。

5．威滕（Witten，Edward，1951—）大统一计划

近25年来，在数学和物理学的交界地带，出现令人震惊的大变化，这个变化造成数学和数学物理向前所未有的深度进军，其最终结果尚难预料，不过近年来的突破已经是足够鼓舞人心的了。

本世纪物理学两项公认的革命，一是相对论，二是量子力学，后者对物质结构的应用已导致除引力之外其它三种相互作用的统一。从爱因斯坦到外尔无疑都最关心我们最常见的两种力——引力和电磁力的统一，外尔因此建立了规范不变的概念。电磁场的规范变换对应交换群 U（1），而杨振宁和米尔斯（Mills，Robert，1926—）1954年向非交换群的过渡证明在物理学上是富有成果的。只有到1974年杨振宁和陈省身等数学家研究发现其间的联系。这时从阿提雅开始求解流形上的杨—米尔斯方程，而自对偶方程的解称为瞬子。但是物理学会给数学带来什么呢？

1982年，数学得到物理学的回报。唐纳森当时还是一位研究生，发现瞬子的参模空间包含底流形许多结构信息，特别他的结果导致四维庞加莱猜想的解决。通过这个途径，唐纳森构造了他的几何拓扑不变量，但他的理论对物理学家来说实在太难了。

1988年威滕通过把唐纳森理论与物理的量子场论联系起来，使得物理学和数学进一步接近，还使许多数学理论形成统一的局面。例如纽结理论和量子群，共形场论和无穷维李代数等等。更有趣的是，1994年塞伯格（Seiberg，Nathan）和威滕得出一个塞伯格—威滕方程，它们远远比杨—米尔斯方程简单，但却同它们等价，由此很容易得出许多年以前很费力才得

到的不变量。这种突破在数学和物理学上的意义正在进一步挖掘中。

6. 其它理论

有前途的理论还有许多，这里只是简单列举一下：

（1）德林费尔德（Drinfeld, Vladimir, 1954—）等创立的量子群理论。

（2）格洛莫夫的辛几何理论。

18、19世纪数学中，分析占有突出的，也可以说是领先的地位。20世纪结构数学的发展，也对分析产生影响。反之，数学分析尤其是常微分方程及偏微分方程对结构数学也有重大的贡献。分析数学这一块，需要比本书更多的篇幅加以论述。作为结尾，本书只能对这个极为重要的领域略谈一二。

如果说结构数学描写数学对象的静态方面，那么分析数学则从动态开始。因此，分析的头一个大领域就是常微分方程及动力系统。实际上，从牛顿的时代起，力学就是这个领域的带头羊。19世纪末庞加莱的工作已预示当前热门领域——浑沌、分维、分形、分叉等理论，它们都构成动力系统这一个重要分支。无疑，结构数学中代数及拓扑的观点对于这个领域的现代发展是至关重要的，这里我们只需举出斯梅尔和阿诺德的名字，前者是大拓扑学家，正是他更新了动力系统理论；后者在前人工作的基础上，通过李代数和辛结构大大扩展了这一分支。动力系统的另一个半独立分支是遍历理论。

偏微分方程的理论和技术一直是数学分析的核心。结构数学特别是与经典数学如微分几何学，许多问题最终归结为方程求解问题。硬分析的进步对于结构数学有重大意义，这些表现在丘成桐等的工作中，他们的工作后来扩展为几何分析。

非线性方程取得了重大突破，特别是 *KdV* 方程存在精密解导致一系列结构数学的成果，这些都充分显示出数学的统一性，而统一性则是 21 世纪数学的主要特征。

参 考 文 献

说明：像本书这样的著作，本应附有详尽的参考文献，特别是原始论文，有的著作甚至有一整卷参考文献，这是远远超出我们的能力的。因此，我们列上这个分类文献目录，它们大都是标准专著，附有详细的文献，从而一方面作为书中内容的根据，另一方面供有兴趣的读者进一步学习参考。本书只列与本书有关题材的著作，尤其是推荐读者学习前苏联出的一套综述的英译本（B〔2〕），它们直接可以把读者带到当代数学前沿。狄奥东涅独一无二的著作（B〔3〕）对于20世纪数学仍不失为一本导引，它的材料终止于1980年左右，而近20年的成就请参看本书的结束语部分。为了方便读者，文献最后列举已出全集或选集的50位著名数学家的姓名，读这些大师的著作，肯定会使读者大开眼界的。

A 数学史

〔1〕 M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972. (有中译本《古今数学思想》，北京大学数学系数学史翻译组译，上海科学技术出版社，1981.)

〔2〕 J. Dieudonné ed, *Abrégé d'histoire des mathematiques*

Ⅰ, Ⅱ, Hermann, Paris, 1978.

〔3〕 B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, Berlin, 1985.

〔4〕 J. Dieudonné, *History of Algebraic*, Geometry Wadsworth, California, 1985.

〔5〕 J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

〔6〕 J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology*, 1900—1960, Birkhäuser, Boston, 1989.

〔7〕 Bruce Chandler, Wilhelm Magnus, *The History of Combinatorial Group Theory*, Springer, 1982.

〔8〕 J. C. Pont, *La topologie algebrique des origines a Poincare*, Presses Univ. de France, Paris, 1974.

B 数学综览

〔1〕 N. Bourbaki, *Elements de Mathematique*, 共 10 大类, 41 分册. Hermann, 1939—1976, Masson, 1980—1983.

〔2〕 R. V. Gamkrelidze ed, *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer, 1988—, 分 10 余类, 与本书相关的有:

(1) Number Theory

(2) Algebra

(3) Lie group and Lie algebra

(4) General Topology

(5) Topology

(6) Algebraic Geometry

(7) Several Complex Variables

(8) Dynamical Systems

(9) Geometry

〔3〕 J. Dieudonné, *Panorama des mathematiques pures*, Bordaś, 1977. 增补英译本 1981.

C 数理逻辑与数学基础

〔1〕 D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischon Logik*, Springer, 1928, 5th edn. 1967.

〔2〕 S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, John Wiley, 1967.

〔3〕 J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

〔4〕 S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, van Nostrand, 1952.

〔5〕 J. Barwise, ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

〔6〕 G. H. Moore, *Zermelo's Axioms of Choice*, Springer, 1982.

D 抽象代数学

〔1〕 B. L. van der Waerden, *Algebra*, Ⅰ, 9th edn. 1993, Ⅱ, 7th edn. 1993, Springer.

〔2〕 N. Jacobson, *Basic Algebra*, I, Ⅱ, W. H. Freeman and Co, San Francisco 1974, 2nd edn. 1985.

〔3〕 N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Ⅰ—Ⅲ, Springer.

〔4〕 G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. 1940, 1967.

〔5〕 M. Hazewinkel, ed. *Handbook of Algebra*, Ⅰ, North-Holland, 1996.

〔6〕 D. Jungnickel, *Finite Fields, Structure and Arithmetic*, Bibliographisches Institut, 1993.

〔7〕 F. Q. Gouvea, *p-adic Numbers*, Springer, 1993, 2nd edn. 1997.

〔8〕 L. Rowen, *Ring Theory*, Ⅰ, Ⅱ, Academic Press, 1988.

E 点集论与一般拓扑学

〔1〕 F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Teubner, 1914.（有中译本）

〔2〕 C. Kuratowski, *Topologie* Ⅰ, Ⅱ, Monog. Mat. Warszawa. Ⅰ, 1933, 1948, 1958, Ⅱ, 1950.

〔3〕 J. L. Kelley, *General Topology*, van Nostrand, 1955.（有中译本）

〔4〕 G. M. Reed, ed. *Set-Theoretic Topology*, Academic Press, 1977.

〔5〕 K. Menger, *Dimension-theorie*, Teubner, 1928.

〔6〕 W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1941.

〔7〕 R. Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland, 1978.

〔8〕 E. Cech, *Topological Spaces*, Wiley, 1966.

F 实分析

〔1〕 Y. N. Moschovakis, *Deseriptive set Theory*, North-Holland, 1980.

〔2〕 A. S. Kechris and A. Louveau, *Descriptive Set Theory and the structure of sets of uniqueness*, Cambridge Univ. Press, 1988.

〔3〕 S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa, 1937.

〔4〕 P. R. Halmos, *Measure Theory*, van Nostrand, 1950.（有中译本）

〔5〕 R. Baire, *Lecons sur les fonctions discontinues*, Gauthier-Villars, 1905.

〔6〕 J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 1971.

〔7〕 H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan, 1968.

G 泛函分析

〔1〕 S. Banach, *Théorie des Opérations Lineaires*, Warszawa, 1932.

〔2〕 P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, 1951.

〔3〕 F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional Analysis*, F. Ungar, 1955.

〔4〕 K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1968.

〔5〕 W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

H 群论

〔1〕 D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1968.

〔2〕 D. Gorenstein, *Finite simple Groups*, Plenum Press, New York, 1982.

〔3〕 Derek J. S. Robinson, *A Course in the theory of Groups*, Springer, 2nd edn. 1996.

〔4〕 L. J. Rotman, *An Introduction to the theory of groups*, 4th edn. Springer, 1995.

〔5〕 M. Suzuki, *Group theory*, Springer Ⅰ, 1982, Ⅱ, 1986.

〔6〕 B. Huppert, *Endliche Gruppen*, I, Springer, 1967.

〔7〕 B. Huppert and N. Blackburn, *Finite Groups*, Ⅱ, Ⅲ, Springer, 1982.

〔8〕 M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, New York, 1986.

〔9〕 Wilhelm Magnus, Abraham Karrass and Donald Soltar, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 1966.

〔10〕 Roger Lyndon, C. Paul and E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 1977.

〔11〕 Baumslag, Gilbert, *Topics in Combinatorial Group Theory*, Birkhauser, 1993.

〔12〕 M. Aschbacher, *Sporadic Groups*, Cambridge Univ. Press, 1944.

〔13〕 D. Gorenstein, R. Lgons and R. Solomon, *The Classification of the finite simple groups*, Amer. Math. Soc. 1994, 1996.

I 李群和代数群

〔1〕 C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, I, Princeton Univ. Press, 1946.

〔2〕 A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969.

〔3〕 A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.

〔4〕 M. Demazure and P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Vol. I, Masson, Paris, 1970.

〔5〕 J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin, 1965.

〔6〕 S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric Spaces*, Springer, 1989.

J 代数拓扑学，同调代数，K 理论

〔1〕 J. F. Adams, *Stable homotopy theory*, Lect. Notes in Math. 3, Springer, 1964.

〔2〕 J. F. Adams, *Lectures on generalized cohomology*, Lect. Notes in Math. 99, Springer, 1966.

〔3〕 J. F. Adams, *Algebraic Topolopy: A Student's Guide*, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series 4, Cambridge U. P. 1972.

[4] P. Alexandroff and H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer, 1935 (Die Grundlehren der math. Wiss, Bd. 45).

[5] M. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.

[6] A. Borel, *Seminar on transformation group*, Princeton Univ. Press, 1960 (Ann. of Math. Studies No. 46).

[7] K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[8] R. F. Brown, *The Lefschetz fixed point theorem*, Glenview, Illinois, 1972.

[9] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra* Princeton Univ. Press, 1956.

[10] P. J. Hilton and S. Wylie, *Homlogy Theory*, Cambridge Univ. Press, 1960.

[11] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.

[12] R. Godement, *Topologie algebrique et theorie des faisceaux*, Publ. de l'Inst. math. de Strasbourg, XII, Hermann, Paris, 1958.

[13] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1967.

[14] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[15] J. Hocking and G. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1961.

[16] W. V. D. Hodge, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.

〔17〕 A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1972.

〔18〕 S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York and London, 1959.

〔19〕 B. Gray, *Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Academie Press, 1975.

〔20〕 D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York, 1966.

〔21〕 A. T. Lundell and S. Weingram, *Topology of CW-complexes*, van Nostrand Reinhold, 1969.

〔22〕 S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 12, Providence, R. I. 1930.

〔23〕 S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 27, Providence, R. I. 1942.

〔24〕 S. Lefschetz, *Topics in Topology*, Princeton Univ. Press, 1942 (Ann. of Math. Studies, No. 10).

〔25〕 N. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge Tracts No. 73, Cambridge Univ. Press, 1978.

〔26〕 S. Mac Lane, *Homology*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1963 (Die Grundlehren der Math. Wiss. Bd. 114).

〔27〕 J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, 1963 (Ann. of Math. Studies, No. 51).

〔28〕 J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*. Princeton Univ. Press, 1974 (Ann. of Math).

〔29〕 E. H. Spanier, *Algebraie Topology*, McGraw-Hill,

1966.

〔30〕 G. de Rham, *Varietes differentiables*, Formes, courants, formes harmoniques, Hermann, Paris, 1955.

〔31〕 D. Rolfson, *Knots and links*, Publish of Perish, Berkeley, CA, 1976.

〔32〕 H. Seifert and W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig-Berlin, 1934.

〔33〕 Seminaire. H. Cartan de l'ENS, 1940-1950: *Homotopie, espaces fibres*, Secr. math. ll, R. P. Curie, Paris.

〔34〕 Seminaire. H. Cartan de l'ENS, 1954-1955: *Algebres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie*, Secr. math. ll, R. P. Curie, Paris, 1956.

〔35〕 Seminaire. H. Cartan de l'ENS, 1958-1959: *Invariant de Hopf et operations cohomologiques secondaires*, Secr. math. ll, R. P. Curie, Paris, 1959.

〔36〕 Seminaire. H. Cartan de l'ENS, 1959-1960: *Periodicite des groupes d'homotopie stables des groupes classiques*, d'apres Bott, Secr. math. ll, R. P. Curie, Paris, 1961.

〔37〕 Seminaire. G. de Rham, Univ. de Lausanne, 1963-1964: *Torsion et type simple d'homotopie*, Lect. Notes No. 48, Springer, 1967.

〔38〕 A. Wallace, *Homology theory of algebraic varieties*, Pergamon Press, 1958.

〔39〕 R. Fritsch and R. A. Piccinini, *Cellular structures in topology*, Cambridge Univ. Press, 1990.

〔40〕 N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Pri-

neeton Univ. Press, 1951.

〔41〕 N. Steenrod, *Cohomology Operations*, Princeton Univ. Press, 1962.

〔42〕 G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer, 1978.

〔43〕 R. M. Switzer, *Algebraic Topology: Homotopy and Homology*, Springer, 1975.

〔44〕 S. MacLane, *Categories for the working Mathematician*, Springer, 1971.

〔45〕 R. Bott. and L. W. Tu, *Differentid Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

〔46〕 W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer.

〔47〕 M. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, 1967.

〔48〕 M. Karoubi, *K-theory, an Introduction*, Springer, 1978.

〔49〕 J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, 1971.

〔50〕 H.-J. Baues, *Homotopy Type and Homology*, Clarendon Press, 1996.

K 微分几何与大范围分析

〔1〕 S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vols 1 and 2, Interscience, New York, 1963-1969.

〔2〕 M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differ-*

ential Geometry, Vol I-V, Publish or Perish, 1970-1973.

〔3〕 S. Sternberg, *Lectures on differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, NJ, 1964.

〔4〕 B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko and S. P. Novikov, *Modern Geometry*, Vol. 1 – 3, Springer, 1978 – 1981.

〔5〕 S. Kobayashi, *Transformation groups in differential Geometry*, Springer, 1972.

〔6〕 W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*, Springer, 1978.

〔7〕 D. W. Kahn, *Introduction to Global Analysis*, Academic Press, 1980.

L 多复变

〔1〕 H. Grauert and R. Remmert, *Theory of Stein Spaces*, Springer, 1979.

〔2〕 L. Hörmander, *An Introduction to Complex analysis in Several variables*, North-Holland, 1973.

〔3〕 R. O. Wells, Jr. *Differential Analysis on complex manifolds*, Springer, 1980.

〔4〕 S. S. Chern, *Complex manifoldg without Potential Theory*, Springer, 1979.

〔5〕 A. Weil, *Introduction à l'etude des varietes kähleriennes*, Hermann, 1958.

〔6〕 H. Grauert and K. Fritzsche, *Several Complex variables*, Springer, 1976.

M 代数几何学

〔1〕E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris, *Topics in the theory of algebraic curves*, Springer, 1985.

〔2〕E. Brieskorn and H. Knorrer, *Plane algebraic curves*, Birkhauser, 1986.

〔3〕H. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer, 1980.

〔4〕W. Fulton, *Algebraic curves*, Benjamin-Cummings, 1969.

〔5〕P. A. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*, Americam Mathematical Society, 1989.

〔6〕P. A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

〔7〕R. C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton, 1966.

〔8〕R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

〔9〕K. Kendig, *Elementary algebraic geometry*, Springer, 1977.

〔10〕D. Mumford, *Curves and their Jacobians*, University of Michigan Press, 1975.

〔11〕D. Mumford, *Algebraic geometry I: Complex projective varieties*, Springer, 1976.

〔12〕M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, Lon-

don Math. Soc. Student Texts 12, Cambridge University Press, 1988.

〔13〕 I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer, 1974.

〔14〕 G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, 1957.

〔15〕 O. Zariski, *Algebraic Surfaces*, Springer, 1971.

〔16〕 W. Barth, C. Peters, A. van de Ven, *Compact complex Surfaces*, Springer, 1984.

〔17〕 F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer, 1956, 1966, 1978.

〔18〕 A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc. 1946, 1962.

〔19〕 W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer, 1984.

〔20〕 A. Grothendieck and J. Dieudonne, *Elements de geométrie algebrique*, Publ, Math. IHES, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

〔21〕 S. Iitaka, *Algebraic Geometry*, Springer, 1982.

N 数论与算术代数几何

〔1〕 J. W. S. Cassels, A. Fröhlich eds, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, New York, 1967.

〔2〕 Z. I. Borevitch and I. R. Shafarevitch, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

〔3〕 J. - P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970, 2nd edn. 1977.

〔4〕 W. W. J. Hulsbergen, *Conjectures in Arithmetic algebraic Geometry*, Vieweg, Braunschweig, 1992.

〔5〕 A. W. Knapp, *Elliptic Curves*, Princeton University Press, Princeton, 1992.

〔6〕 N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Springer-Verlag, New York, 1984.

〔7〕 S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, 1983.

〔8〕 S. Lang, *Cyclotomic Fields*, I (1978), II (1980), Combined Second edn. Springer-Verlag, 1990.

〔9〕 L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer-Verlag, 1982.

〔10〕 L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, New York, 1969.

〔11〕 T. Skolem, *Diophantische Gleichangen*, Springer-Verlag, Berlin, 1938,

〔12〕 A. Weil, *Number Theory*, Birkhauser, Boston, 1984.

〔13〕 H. E. Rose, *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, 1988.

〔14〕 W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Second edn. Substantially Revised and Extended, Springer-Verlag, Berlin, PWN, Warszawa, 1990.

〔15〕 E. Artin and J. Tate, *Class field theory*, Benjamin, 1967.

〔16〕 J. Neukirch, *Class field theory*, Springer, 1986.

O 全集或选集（按出生年月排序）

R. Dedekind
C. Jordan
G. Cantor
F. Klein
G. Frobenius
H. Poincare
V. Volterra
D. Hilbert
E. Cartan
E. Borel
I. Schur
H. Lebesgue
F. Riesz
L. E. J. Brouwer
E. Noether
H. Weyl
E. Hecke
M. Morse
S. Banach
H. Hopf
C. L. Siegel
E. Artin
H. Hasse
O. Zariski
S. Bochner
R. Brauer
A. N. Kolmogorov
J. von Neumann
W. Hurewicz
H. Cartan
J. H. C. Whitehead
K. Gödel
A. Weil
J. Dieudonne
H. Whitney
L. Pontrjagin
C. Chevalley
S. MacLane
N. Jacobson
陈省身
S. Eilenberg
R. H. Bing
K. Kodaira（小平邦彦）
P. R. Halmos
A. Selberg
A. Borel
R. Bott
J. -P. Serre
F. Hirzebruch
M. F. Atiyah